5.4 Equations de Maxwell-Exercice 2

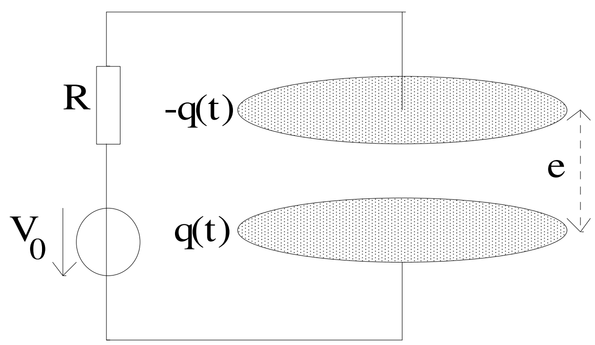
Les armatures d'un condensateur plan, constituées de deux disques conducteurs de rayon a, de surface S, de même axe Oz et séparés d'une distance e sont reliées à un générateur de f.e.m V_0 par une résistance R. Initialement le condensateur est déchargé. A un instant quelconque où la tension à ses bornes vaut V(t), ses armatures portent respectivement les charges q(t) = CV(t) et -q(t) où $C = \varepsilon_0 S/e$ est la capacité du condensateur. On néglige les effets de bords.
En coordonnées cylindriques, le champ électromagnétique dans le condensateur est *en première approximation* de la forme : $\vec{E} = E(t)\vec{u}_z$; $\vec{B} = B(r,t)\vec{u}_\theta$ et $\vec{E} = \vec{0}$ à l'extérieur du condensateur.

a-Déterminer V(t) et l'énergie U_c du condensateur dans l'état final.

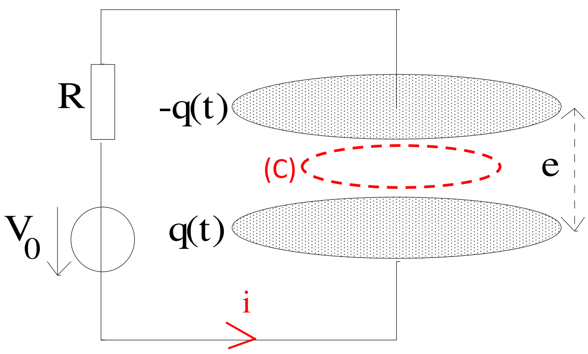
b-A un instant quelconque, déterminer E(t) et B(r,t).

c-En déduire la puissance électromagnétique *P* reçue par l'intérieur du condensateur, puis l'énergie électromagnétique U_{em} emmagasinée par le condensateur au cours de sa charge. Conclure.

d-Retrouver U_{em} à l'aide de la densité volumique d'énergie électromagnétique.



5.4 Equations de Maxwell-Exercice 2



a-Loi des mailles : $V_0 = V(t) + Ri$ avec $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dV}{dt}$

$$RC\frac{dV}{dt} + V = V_0$$

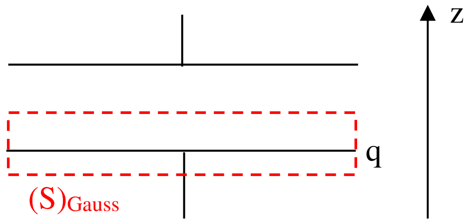
Solution : $V(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + V_0$ avec $\tau = RC$

A t = 0 : V(0) = 0 d'où A = - V_0

Donc : $\boxed{V(t) = V_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$

Pour t >> τ : V(t) = V_0

L'énergie emmagasinée est alors : $\boxed{U_c = \frac{1}{2}CV_0^2}$



b-Théorème de Gauss pour le cylindre de section S entourant l'armature de charge q :

$$\iint_{(S)_{Gauss}} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad => \quad E(t)S = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad => \boxed{E(t) = \frac{q}{S\varepsilon_0} = \frac{V(t)}{e}}$$

(le flux à travers le couvercle inférieur est nul car le champ électrique est nul à l'extérieur)

$\vec{B} = B(r,t)\vec{u}_\theta$ est orthoradial => on applique le théorème d'Ampère généralisé sur le cercle (C) de rayon r

$$\int_{cercle} \vec{B}.d\vec{r} = 0 + \varepsilon_0\mu_0 \iint_{disque\ de\ rayon\ r} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.d\vec{S}$$ (i = 0 dans le volume vide intérieur au condensateur)

Soit : $2\pi r B(r,t) = \varepsilon_0\mu_0 \frac{dE}{dt}\pi r^2$ D'où : $\boxed{B(r,t) = \frac{\mu_0 r\dot{q}}{2S} = \frac{\mu_0 rC\dot{V}}{2S}}$

c- $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{rq\dot{q}}{2\varepsilon_0 S^2}\vec{u}_r$ puissance reçue à travers la surface latérale car flux nul à travers les couvercles

$$P_{reçue} = \oiint_{\substack{frontière \\ du\ condensateur}} \vec{\Pi}.d\vec{S} = \iint_{surface\ latérale} -\frac{aq\dot{q}}{2\varepsilon_0 S^2}\vec{u}_r.(-dS\vec{u}_r)$$ signe - pour $d\vec{S}$ car puissance reçue

$$P_{reçue} = \frac{aq\dot{q}}{2\varepsilon_0 S^2}.\iint_{surface\ latérale} dS = \frac{aq\dot{q}}{2\varepsilon_0 S^2}.2\pi ae = \frac{\pi a^2 e}{\varepsilon_0 S^2}CV.C\dot{V}$$ donc : $\boxed{P_{reçue} = CV\dot{V}}$

$$U_{em} = \int_0^{+\infty} P_{reçue}dt = C\left[\frac{V^2}{2}\right]_0^{V_0} = \frac{1}{2}CV_0^2 = U_c$$

d-On a : $U_{em} = \iiint_{\substack{volume \\ du\ condensateur}} u_{em}d\tau = \iiint_{\substack{volume \\ du\ condensteur}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$

Dans l'état final $E = \frac{V_0}{e}$ donc : $U_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{V_0^2}{e^2}\iiint_{\substack{volume \\ du\ condensateur}} d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{V_0^2}{e^2}.\pi a^2 e$

On retrouve : $\boxed{U_{em} = \frac{1}{2}CV_0^2 = U_c}$
