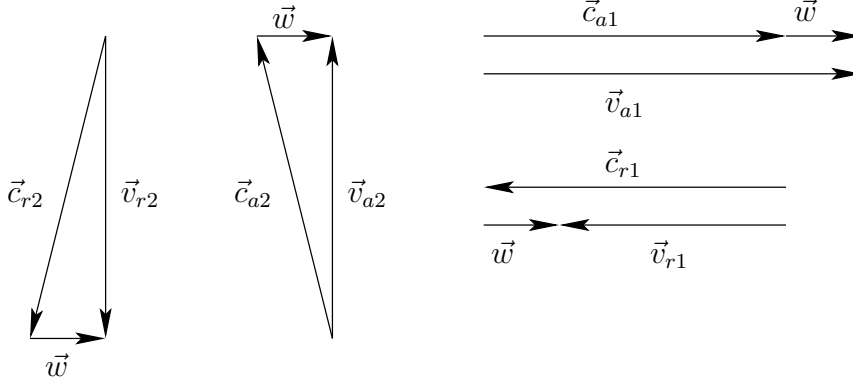


Corrigé de l'épreuve de physique CCINP MP 2020

Corrigé proposé par Sylvain Condamin, avec la participation de Frédéric Boyer et Luc Dettwiller.

1 L'expérience "MM" : Michelson et Morley

1. Les vitesses $\vec{v}_{\epsilon i}$ sont selon les axes, on en déduit la direction de $\vec{c}_{\epsilon i}$ via la loi de composition des vitesses $\vec{v}_{\epsilon i} = \vec{c}_{\epsilon i} + \vec{w}_{\epsilon i}$.



On en déduit : $v_{a1} = c + w$, $v_{r1} = c - w$, et $c^2 = v^2 + w^2$ dans les deux autres cas, ce qui donne bien $v = \sqrt{c^2 - w^2}$.

2. On aurait alors $\tau(\alpha) = \frac{L}{v_{a2}} + \frac{L}{v_{r2}} - \frac{L}{v_{a1}} - \frac{L}{v_{r1}}$, soit :

$$\tau(\alpha) = \frac{L}{c} \left(2 \left(1 - w^2/c^2 \right)^{-1/2} - \frac{1}{1+w/c} - \frac{1}{1-w/c} \right)$$

Avec un DL à l'ordre 2 (attention, le DL donné par le sujet est faux!), on a :

$$\tau(\alpha) = \frac{L}{c} \left(2 + \frac{w^2}{c^2} - 1 + \frac{w}{c} - \frac{w^2}{c^2} - 1 - \frac{w}{c} - \frac{w^2}{c^2} \right).$$

Après simplification :

$$\tau(\alpha) = -\frac{Lw^2}{c^3}$$

L'ordre d'interférence p vaut

$$p = \nu \tau(\alpha) = -\frac{Lw^2 \nu}{c^3}$$

3. La rotation de 90° est équivalente à un échange des voies 1 et 2 (l'ordre de l'aller et du retour n'ayant pas d'importance), donc on a simplement un changement de signe :

$$\tau(\beta) = -\tau(\alpha) \text{ et ainsi de suite.}$$

$$\text{En particulier } p(\beta) = \frac{Lw^2 \nu}{c^3}.$$

4. C'est immédiat à partir de ce qui précède.
5. On attend un déplacement de la figure d'interférence d'une distance $i\Delta p$, orthogonalement à la direction des franges.
6. (a) Le référentiel héliocentrique est le référentiel barycentrique du Soleil (centré sur le Soleil, avec des axes pointant vers des étoiles lointaines).
- (b) Première loi : les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil est un des foyers.
Deuxième loi : L'aire balayée par unité de temps par le rayon Soleil-planète est constante.

Troisième loi : Le rapport T^2/a^3 entre la période T et le demi-grand axe a de l'ellipse est indépendant de la planète.

- (c) Il s'agit de la vitesse de la Terre dans le référentiel héliocentrique. On peut la retrouver avec un PFD :

$$\vec{a} = -\frac{M_s G}{r^2} \vec{u}_r = -r\dot{\theta}^2 \vec{u}_r.$$

On a donc : $r^3 = \frac{M_s G}{\dot{\theta}^2}$, et donc, comme $v = r\dot{\theta}$,

$$v^3 = M_s G \dot{\theta}, \text{ et donc } \boxed{v = (M_s G \frac{2\pi}{T})^{1/3} = 29,8 \text{ km.s}^{-1}}.$$

7. $\Delta p = 0,341$, ce qui est largement suffisant pour observer un éventuel effet.

8. $w = \sqrt{\frac{c^3 \Delta p}{2L\nu}} \simeq 5 \text{ km.s}^{-1}$ pour $\Delta p = 1/100$.

On aurait pu considérer que le Soleil se déplaçait par rapport à l'éther et que la somme des vitesses $\vec{v}_{Sol} + \vec{v}_{Terre/Sol}$ aurait par hasard été plus faible que les 5 km.s^{-1} . Ce ne peut en revanche pas être le cas à tout moment de l'année, puisque la direction de \vec{v}_{Terre} varie. Il y a en particulier au moins un moment où elle est alignée avec \vec{v}_{Sol} . La reconduction à différents moments de l'année permet d'écarter cette objection.

Reste encore l'objection "historique", qui était que la Terre aurait pu entraîner l'éther avec son mouvement.

2 Électromagnétisme et relativité

9. $\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$.

10. $\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e'}$.

11. $\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}') = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$.

Soit $\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}' - \vec{v}_e' \wedge \vec{B}'$.

Prendre $\vec{v} = \vec{0}$ donne la première relation et la dépendance en \vec{v} implique $\vec{B} = \vec{B}'$.

12. Dans R' le fil est statique et il n'y a pas de courant. On en déduit $\vec{B}' = \vec{0}$ et donc $\vec{B} = \vec{0}$ d'après ce qui précède.

13. la situation est invariante par translation selon \vec{e}_z et rotation autour de (Oz) , ainsi que par symétrie par $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$. On a donc un champ $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.

Très classiquement, on prend comme surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur h . La charge intérieure Q_{int} vaut $Q_{int} = \pi a^2 \rho_f h$, et le flux de \vec{E} vaut $E(r).2\pi r h$. L'application du théorème de Gauss $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ donne :

$$E(r) = \frac{a^2 \rho_f}{2r\epsilon_0}, \text{ soit :}$$

$$\boxed{\vec{E}' = \frac{a^2 \rho_f}{2r\epsilon_0} \vec{u}_r}. \text{ On a par ailleurs } \vec{E}' = \vec{E}.$$

14. On a simplement $I = \frac{dq}{dt} = \lambda \frac{dz}{dt} = \lambda V_e$. (il est aussi possible de procéder avec $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$ mais c'est un peu plus long).

La situation magnétostatique présente les mêmes invariances par rotation et translation, ainsi qu'une invariance par symétrie par $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$. On a donc $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$. On prend comme contour d'Ampère un cercle de rayon r , et le théorème D'Ampère $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_e$ donne :

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

$$\text{Soit } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta.$$

C'est incompatible avec le résultat précédent : les lois de la mécanique classique ne sont pas applicables.

15. $\vec{E}'_{\parallel} = \vec{0}$, donc $\vec{E} = \gamma \vec{E}' = \gamma \frac{a^2 \rho_f}{2r\epsilon_0} \vec{u}_r$. Par ailleurs $\vec{B} = \gamma \frac{v_e}{c^2} \vec{u}_z \wedge \frac{a^2 \rho_f}{2h\epsilon_0} \vec{u}_r = \gamma \mu_0 v_e \frac{a^2 \rho_f}{2r} \vec{u}_\theta$. Le dernier terme correspondant à $\frac{\lambda_f}{2\pi}$ on retrouve l'expression précédente à un facteur γ près.
16. Pour retrouver les résultats par calcul direct il faut une densité de charge $\lambda = \gamma \lambda_f$. Comme $\gamma > 1$, cela correspond à une contraction des longueurs.

3 L'expérience "M-G-P" : Michelson-Gale-Pearson (1924), ou de la mesure de l'effet Sagnac à l'échelle de la Terre

17. Le référentiel géocentrique est le référentiel barycentrique de la Terre (en translation par rapport à un référentiel galiléen). Dans ce référentiel la terre a un mouvement de rotation autour de l'axe des pôles. On a $\Omega_T = \frac{2\pi}{T_j}$ (si T_j est le jour sidéral, non précisé...)

18. La Terre se déplace vers l'Est dans le référentiel géocentrique, le vent d'éther souffle vers l'ouest. On a $w(\varphi) = r\Omega_T$ où $r = R_T \cos \varphi$ est le rayon en coordonnées cylindriques. Soit $w(\varphi) = R_T \cos(\varphi)\Omega_T$.

19. (a) C'est le même principe que dans la première partie : $v_{AB} = c - w(\varphi)$ et $v_{CD} = c + w(\varphi + \Delta\varphi)$. On obtient alors :

$$\tau_1 = \tau_0 + \frac{X}{c-w(\varphi)} + \frac{X}{c+w(\varphi+\Delta\varphi)}.$$

$$(b) \tau_1 = \tau_0 + \frac{X}{c} \left(2 + \frac{w(\varphi)}{c} - \frac{w(\varphi+\Delta\varphi)}{c} \right) = \tau_0 + 2\frac{X}{c} - \frac{X}{c^2} \frac{dw}{d\varphi} \Delta\varphi.$$

Par ailleurs $Y = R_T \Delta\varphi$ et $\frac{dw}{d\varphi} = -R_T \sin(\varphi)\Omega_T$.

On a donc $\tau_1 = \tau_0 + \frac{2X}{c} + \frac{X}{c^2} Y \sin(\varphi)\Omega_T$, ce qui donne le résultat demandé avec $f(Y, \varphi) = Y \sin(\varphi)$.

- (c) On inverse simplement les rôles de φ et $\varphi + \Delta\varphi$ pour obtenir :

$$\tau_2 = \tau_0 + \frac{X}{c-w(\varphi+\Delta\varphi)} + \frac{X}{c+w(\varphi)}.$$

20. Le déphasage vaut $\Delta\Phi = \omega(\tau_1 - \tau_2) = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \frac{2\Omega_T X}{c^2} Y \sin(\varphi)$, ce qui donne après réarrangement le résultat demandé.

$$21. p = \frac{\Delta\Phi}{2\pi} = \frac{2S\Omega_n}{\lambda_0 c}.$$

22. Vu la faible valeur de Ω_n , Δp risque d'être assez petit (d'où la nécessité d'un grand interféromètre). Le problème avec la Terre est que Ω_n est une constante, il est donc impossible de comparer la situation avec celle où $\Omega_n = 0$ pour calculer p . Au lieu de cela, on utilise la situation où S est bien plus faible, et donc p négligeable, pour fournir une référence.

Note : si les miroirs sont exactement à 45° , on observe une teinte plate, ce qui ne permet pas de conclure ; un des miroirs doit être légèrement décalé par rapport à 45° pour permettre d'observer des franges (rectilignes et localisées à l'infini, situation qu'on ne rencontre pas avec le Michelson habituel) : c'est le décalage de ces franges entre le petit et le grand chemin qui permet alors de conclure.

23. On obtient $\Delta p = 0,134$, soit deux fois moins que la valeur expérimentale.

Remarque : L'écart n'est pas du comme le suggère l'énoncé à un effet relativiste non pris en compte mais est dû à une erreur subtile dans la modélisation de l'énoncé : en effet le temps τ_0 n'est identique que si AD et CB sont des méridiens. Or, dans ce cas, il ne sont plus tout à fait parallèles, et les longueurs $AB = X(\varphi) = R_T \cos \varphi \Delta\theta$ et $CD = X(\varphi + \Delta\varphi) = R_T \cos(\varphi + \Delta\varphi) \Delta\theta$ sont différentes ($\Delta\theta$ étant la variation de longitude).

On a alors :

$$\tau_1 = \tau_0 + \frac{X(\varphi)}{c-w(\varphi)} + \frac{X(\varphi+\Delta\varphi)}{c+w(\varphi+\Delta\varphi)} = \tau_0 + \frac{X(\varphi)}{c} + \frac{X(\varphi)w(\varphi)}{c^2} + \frac{X(\varphi)}{c} - \frac{X(\varphi+\Delta\varphi)w(\varphi+\Delta\varphi)}{c^2}$$

On a de la même manière :

$$\tau_2 = \tau_0 + \frac{X(\varphi)}{c} - \frac{X(\varphi)w(\varphi)}{c^2} + \frac{X(\varphi)}{c} + \frac{X(\varphi+\Delta\varphi)w(\varphi+\Delta\varphi)}{c^2}$$

et donc :

$$\tau_1 - \tau_2 = -\frac{2}{c^2} \frac{dXw}{d\varphi} \Delta\varphi.$$

On peut écrire $X = X_0 \cos \varphi$ et $w = w_0 \cos \varphi$. On a donc $\frac{dXw}{d\varphi} = -2X_0w_0 \cos \varphi \sin \varphi$, soit le double du terme $X \frac{dw}{d\varphi}$ calculé dans l'énoncé : c'est l'origine du facteur 2!

4 Une application moderne de l'effet Sagnac : le gyromètre à fibre

4.1 Principe de fonctionnement et modulation de phase

24. On a $L = 2\pi r N_t$, ce qui donne :

$$\Delta\Phi_s = \frac{4\pi}{c} \frac{2n\pi r^2 \Omega}{\lambda_0}, \text{ soit :}$$

$$\Delta\Phi_s = \frac{8\pi S_{tot} \Omega}{c\lambda_0}.$$

Note : Dans la partie précédente, on obtenait avec le calcul demandé par l'énoncé $\Delta\Phi_s = \frac{4\pi S_{tot} \Omega}{c\lambda_0}$, soit deux fois moins. Ce facteur 2 est cohérent avec la mesure expérimentale de l'effet Sagnac, ainsi qu'avec le calcul correct après correction de l'erreur d'énoncé.

25. On a alors une interférence entre deux ondes d'intensité $I_0/4$ (puisqu'elles sont passées deux fois dans la séparatrice). On obtient :

$$I = \frac{I_0}{2} (1 + \cos \Delta\Phi_s).$$

Rq : Dans ce cas, contrairement au Michelson classique, chaque rayon a subi une transmission et une réflexion, le déphasage apporté par la lame est donc identique pour chacun d'entre eux.

26. (a) I est indépendant du signe de $\Delta\Phi_s$, donc du signe de Ω . On ne peut donc pas discriminer.

- (b) $\kappa = \frac{I_0}{2} \left| \frac{d\Delta\Phi}{d\Omega} \sin(\Delta\Phi) \right|$, soit :

$$\kappa = \frac{4\pi S_{tot} I_0}{c\lambda_0} \left| \sin \frac{8\pi S_{tot} \Omega}{c\lambda_0} \right|.$$

Pour augmenter la sensibilité, on peut augmenter S_{tot} (en particulier via le nombre de tours), et I_0 . On peut en principe jouer sur la longueur d'onde du laser mais de façon beaucoup plus limitée.

- (c) La sensibilité tend vers 0 pour de faibles vitesses de rotation (le signal est proportionnel à Ω^2).
27. (a) Il suffit de calculer $\Phi_b(t) - \Phi_b(t - \tau_r) = \Phi_0 \cos(2\pi f t) - \Phi_0 \cos(2\pi f (t - \tau_r))$. La formule trigonométrique appropriée donne alors le résultat demandé.

(b) On peut prendre $f_m \tau_r = \frac{1}{2}$. On obtient alors : $\Delta\Phi_t = \Delta\Phi_s - 2\Phi_0 \sin(2\pi f_m t - \frac{\pi}{2})$, ce qui donne le résultat demandé avec $\Phi_{eff} = 2\Phi_0$. La relation entre les fréquences peut s'écrire $f_m = f_p$.

Note : on peut de façon plus générale prendre $f_m \tau_r = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, et obtenir le même résultat. On aurait alors $f_m = (2n + 1)f_p$.

28. $I = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2} \cos(\Delta\Phi_s + \Phi_{eff} \cos(2\pi f_m t))$. La relation trigonométrique de $\cos(a + b)$ donne alors directement le résultat.

4.2 Analyse harmonique

29. On a, en se limitant aux trois premiers termes de la série de Fourier :

$$\cos(\Phi_{eff} \cos(2\pi f_m t)) = J_0(\Phi_{eff}) - 2J_2(\Phi_{eff}) \cos(4\pi f_m t), \text{ et}$$

$$\sin(\Phi_{eff} \cos(2\pi f_m t)) = 2J_1(\Phi_{eff}) \cos(2\pi f_m t).$$

On en déduit donc :

$$i_0 = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2} \cos \Delta\Phi_s J_0(\Phi_{eff});$$

$$i_1 = -I_0 \sin(\Delta\Phi_s) J_1(\Phi_{eff});$$

$$i_2 = -I_0 \cos(\Delta\Phi_s) J_2(\Phi_{eff}).$$

30. (a) $i_1 = 0$ en l'absence de rotation ($\Delta\Phi_s = 0$).

(b) i_1 dépend du signe de $\Delta\Phi_s$, et $\frac{di_1}{d\Phi_s}$ ne s'annule pas quand Φ_s tend vers 0 : cela résout les deux problèmes cités.

31. En utilisant $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b))$, on obtient :

$$p(t) = K K_p i_0 s_0 \cos(2\pi f_m t) + \frac{K K_p s_0 i_1}{2} + \frac{K K_p s_0 i_1}{2} \cos(4\pi f_m t) + \frac{K K_p s_0 i_2}{2} \cos(2\pi f_m t) + \frac{K K_p s_0 i_2}{2} \cos(6\pi f_m t),$$

soit :

$$p_0 = \frac{K K_p s_0 i_1}{2}, p_1 = \frac{K K_p s_0 (i_2 + 2i_0)}{2}, p_2 = \frac{K K_p s_0 i_1}{2}, p_3 = \frac{K K_p s_0 i_2}{2}.$$

32. La cellule RC est un passe-bas : l'objectif est de conserver exclusivement la composante continue, proportionnelle à i_1 , et d'éliminer toutes les composantes variables. La fréquence de coupure d'un tel filtre est $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$; on doit donc avoir $f_c \ll 2f_m$, soit $\tau \gg \frac{1}{4\pi f_m}$.

Pour la valeur numérique il faut relier ceci aux caractéristiques de la fibre :

$$\tau \gg \frac{1}{4\pi f_p} = \frac{nL}{2\pi c} = \frac{nN_t r}{c}.$$

Avec les valeurs numériques de la question suivante, sachant que l'indice est de toute façon d'ordre 1, on a :

$$\tau \gg 10^{-5} \text{ s.}$$

Prendre $\tau = 1$ ms permet d'avoir une bonne marge de sécurité et est facilement réalisable avec des composants usuels.

33. On a $\sin \Delta\Phi_s = \frac{-2u}{K_p K I_0 s_0 J_1(\Phi_{eff})} = 0,517$

(la valeur de $J_1(\Phi_{eff}) = 0,58$ grâce au graphe).

On obtient alors $\Delta\Phi_s = 0,544$ rad (ce qui n'est pas forcément très cohérent avec l'hypothèse $\frac{S_{tot}\Omega}{\lambda_0 c} \ll 1...$)

$$\text{On en déduit } \Omega = \frac{c\lambda_0 \Delta\Phi_s}{8\pi S_{tot}} = 8,47 \cdot 10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}.$$

On est bien en mesure de mesurer de très petites rotations !

4.3 Simulation informatique

34. (a) On a $p(t) = Ri + u = RC \frac{du}{dt} + u$.

Donc : $p(t) = \tau \frac{du}{dt} + u$.

(b) $\frac{du}{dt} = \frac{1}{\tau}(p(t) - u(t))$.

(c) On a directement $u_{n+1} - u_n = \Psi_n$.

35. $\Psi_n = hf(p_n, u_n)$. On a alors $u_{n+1} = u_n + hf(p_n, u_n)$. Il s'agit de la méthode d'Euler.

36. $\Psi_n = \frac{h}{2}(f(p_n, u_n) + f(p_{n+1}, u_{n+1}))$.

Si on évalue dans un premier temps u_{n+1} à l'aide de la méthode d'Euler, on a alors $u_{n+1} = u_n + rh$.

En remplaçant dans $f(p_{n+1}, u_{n+1})$ on obtient la relation demandée.

37. Ligne 32 :

```
return (x - y)/tau
```

Ligne 44 :

```
for n in range(N):
```

```
    T = n*h
```

Ligne 49 :

```
P = [p(tn) for tn in T]
```

Ligne 53 :

```
for n in range(N-1):
```

```
    U.append(U[n]+h*f(P[n],U[n]))
```

(on peut a priori faire un `range(N)` sans bug, mais cela génère une liste de longueur $N + 1$.)

Ligne 65 :

```
for n in range(N-1):
```

```
    r = f(P[n],U[n])
```

```
    U.append(U[n]+(h/2)*(r+f(P[n+1],U[n]+r*h)))
```

38. (a) La valeur de Φ_{eff} joue sur $J_1(\Phi_{eff})$, et donc sur le signe du u moyen. En particulier, $J_1(1, 8 \text{ rad}) > 0$; $J_1(3, 8 \text{ rad}) \simeq 0$ et $J_1(5, 4 \text{ rad}) < 0$. Cela permet d'identifier 4 :e et 5 :d.

L'influence de τ concerne à la fois la qualité du filtrage (qui sera d'autant plus bon que τ est grand) et la durée du régime transitoire (d'autant plus grand que τ est grand). On peut donc identifier : 1 :c ; 2 :b ; 3 :a.

(b) La valeur 3,8 rad est à éviter car c'est un zéro de J_1 : la sortie sera donc nulle, on ne pourra pas détecter quoique ce soit.

(c) Une grande valeur de τ permet un bon filtrage, mais implique un régime transitoire plus long.

(d) La valeur de u sera multiplié par $J(5, 4 \text{ rad})/J(1, 8 \text{ rad})$, soit $-0,36/0,58$, ce sera donc également le cas de la valeur de $\sin(\Delta\Phi_s)$: on obtient

$$\sin(\Delta\Phi_s) = -0,32 \text{ et } \Delta\Phi_s = -0,33 \text{ rad.}$$