Analyse : Chapitre 8

Limites de fonctions - continuité

Dans tout le chapitre, f désigne une fonction définie sur un intervalle ou une union d'intervalle D_f et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère un réel a tel que $a \in D_f$ ou bien a est "au bord" de D_f. Ainsi, a n'est pas forcément dans l'ensemble de définition de la fonction : par exemple si $D_f = \mathbb{R}^*$, a peut être égal à 0.

I Limite d'une fonction

1) Notion de voisinage

a) Voisinage d'un point

Définition :

On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage d'un point** a si il existe un intervalle ouvert contenant a tel que la propriété est vraie sur cet intervalle sauf éventuellement au point a.

Exemple :
La fonction cos est positive au voisinage de 0. En effet

Remarque :
Lorsque l'on parle de fonction, l'expression "au voisinage de" sous entend que l'on reste dans l'intervalle de définition de la fonction.
Ainsi, $x \to \ln(x)$ est négative au voisinage de 0, bien qu'on ne puisse pas faire d'intervalle autour de 0 sur lequel ln est défini.

b) Voisinage de l'infini

Définition :

On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage de** $+\infty$ (resp. $-\infty$) si il existe un intervalle avec borne $+\infty$ (resp $-\infty$) tel que la propriété est vraie sur l'intervalle.

Remarque :
C'est l'analogue pour les fonctions du "à partir d'un certain rang" pour les suites.

Exemple :
$x \to \ln x$ est positive au voisinage $+\infty$. En effet :

2) Limite finie

a) Limite en un point a

Définition :

On dit que la fonction f **admet une limite** $\ell \in \mathbb{R}$ en un point a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f,\ \text{si } |x-a| \leq \eta,\ \text{alors } |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

Interprétation :
Pour tout ε, on peut toujours s'approcher assez de a (c'est le "$\exists\eta$ tel que $|x-a|\leq\alpha$") pour garantir que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ (i.e. $|f(x)-\ell|\leq\varepsilon$).
Ainsi, ε est en quelque sorte la "précision" voulue, et η nous donne le seuil à partir duquel cette précision est atteinte.

Remarque :
η dépend clairement de ε : si ε est petit, il faut a priori choisir un η plus petit. Attention à l'ordre des quantificateurs ! C'est déjà "$\forall\varepsilon$", puis "$\exists\eta$".
Comme pour les suites, on a le résultat suivant :

Propriété 1 : Unicité de la limite
Soient ℓ et ℓ' dans $\mathbb{R}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell'$, alors $\ell=\ell'$.

▷ *Preuve* : La même que pour les suites, à quelques adaptations près. On admet.

◁

Propriété 2 : Limite en un point où la fonction est définie
Supposons que $a\in D_f$, c'est à dire que $f(a)$ existe.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

▷ *Preuve* :

◁

Ce résultat est ce qui entrainera la définition de fonction continue, dans la seconde partie de ce chapitre....

b) Limite à l'infini

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert vers $+\infty$.
On dit que f admet une limite ℓ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ si et seulement si

$$\forall\varepsilon>0,\exists M\in\mathbb{R},\forall x\in D_f,\ \text{si } x\geq M,\ \text{alors } |f(x)-\ell|\leq\varepsilon$$

De même, on dira $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ si et seulement si

$$\forall\varepsilon>0,\exists M\in\mathbb{R},\forall x\in D_f,\ \text{si } x\leq M,\ \text{alors } |f(x)-\ell|\leq\varepsilon$$

Remarques
- Comme pour la limite finie, M dépend de ε.
- C'est plus ou moins la même définition que les suites : M joue le rôle de n_0 et on a l'idée que "pour x assez grand", on est proche de la limite.
- Graphiquement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ traduit la présence d'une asymptote horizontale, d'équation $y=\ell$

c) Précisions éventuelles

Comme pour les suites, on peut parfois, à partir d'une étude plus ou moins poussée, déterminer le signe de $f(x) - \ell$ lorsque l'on est proche de x_0. On pourra alors noter :

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell^-$ si, au voisinage de x_0, $f(x) \leq \ell$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell^+$ si, au voisinage de x_0, $f(x) \geq \ell$.

Exemples :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x \to 0} |x| =$
- $\lim\limits_{x \to 0} x^3$

3) Limite à droite et limite à gauche

a) Definitions

Définition :

- On dit que f admet comme **limite à droite de** a le réel ℓ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, \text{ si } 0 < x - a \leq \eta, \text{ alors } |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$, $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$, ou encore $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} \ell$.

- On dit que f admet comme **limite à gauche de** a le réel ℓ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, \text{ si } -\eta \leq x - a < 0, \text{ alors } |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$, $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell$, ou encore $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x < a}}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque :
Contrairement à la limite "tout court", x ne vaut jamais ce point : notez bien que $x < a$ ou $x > a$ dans la définition !

La fonction partie entière

Rappel :
On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction partie entière, notée $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, qui à tout nombre réel x associe le plus grand entier relatif qui le précède.

Remarque :
Certaines limites à gauche n'existent pas car la fonction n'est pas définie à gauche du point considéré. Par exemple $x \mapsto \sqrt{x}$ n'a pas de limite à gauche en 0. En fait, parler de limite à gauche dans ce cas n'a même pas de sens...

b) Lien avec les limites "tout court"

Dans le cas où les limites à gauche et à droite ont un sens, on a le résultat suivant :

Proposition 1 :

Soit a tel que les limites à gauche et à droite de a ont un sens, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Longrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$$

▷ *Preuve* : On admet, mais intuitivement clair : la limite "tout court" prend déjà en compte les deux côtés...

◁

⚠ La réciproque est fausse : soit par exemple

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 0$.

Cependant, la limite de f en 0 n'existe pas... comme on le montrera un peu plus bas ;-)

Corolaire 1 :

Si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell'$ avec $\ell \neq \ell'$, alors f n'admet pas de limite en x_0.

Exemple : Partie entière

En pratique, on utilisera beaucoup le résultat suivant, qui résume les précédents :

Proposition 2 :

Soit a tel que les limites d'une fonction f à gauche et à droite de a ont un sens.

- Si f n'est pas définie en a :

$$\text{si } \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \text{ alors } \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

- Si f est définie en a :

$$\text{si } \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \text{ et } \ell = f(a) \text{ alors } \lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

4) Limites infinies

a) En un point fini

Définition :

On dit que f admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en un point a si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f,\ \text{si } |x-a| \leq \eta \text{ alors } f(x) \geq A$$
$$(\text{resp.} \forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f,\ \text{si } |x-a| \leq \eta \text{ alors } f(x) \leq A)$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.
(resp. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$).

Traduction :
Au voisinage de a, $f(x)$ est plus grande (resp. plus petite) que n'importe quel nombre.

Remarque :
On définit de même les limites à droite et à gauche.

Exemple :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|} =$

Interprétation graphique : asymptote verticale.

b) En un point infini

Définition :

On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B \geq 0, \forall x \in D_f,\ \text{si } x \geq B,\ \text{alors } f(x) \geq A$$

Et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exemples :

Remarque :
On définit de la même façon le fait que f admette pour limite $-\infty$ en $+\infty$, et toujours dans le même esprit les limites prises en $-\infty$.

c) Interprétation graphique : asymptotes et branche parabolique

Définition :

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe de la fonction f. On dit qu'une droite D est asymptote à $\mathcal{C}_f$ si la "distance" de la droite D à $\mathcal{C}_f$ tend vers 0. On admet que l'on peut définir une telle distance, et on admet également que s'il y a une droite asymptotique, celle-ci est unique (cela est du à l'unicité de la limite...).

Si il n'y a pas de telle droite, on parle de branche "parabolique" : $\mathcal{C}_f$ "part" vers l'infini sans suivre une droite en particulier, mais avec une orientation qu'on peut parfois préciser

Exemple : branche parabolique de direction un des axes

Méthode : **DÉTERMINATION D'UNE BRANCHE PARABOLIQUE**

On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

- Si cette limite est infinie : on a une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
- Si cette limite est nulle : on a une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Exemple : droite asymptote oblique

Définition :

On parle d'asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$ si et seulement si il existe a et b tels que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0$

Le graphe de f admet alors une droite asymptotique d'équation $y = ax + b$

Méthode : **DÉTERMINATION D'ASYMPTOTE OBLIQUE**

On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Si cette limite vaut $a \in \mathbb{R}^*$, on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax$

Si cette dernière limite vaut $b \in \mathbb{R}$, alors $y = ax + b$ est l'équation de l'asymptote oblique au graphe de f.

On fait de même pour une asymptote oblique en $-\infty$.

Exemple :
Soit f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$

II Théorèmes usuels sur les limites

Remarques préliminaires

- Ce sont plus ou moins les mêmes théorèmes que pour les suites, avec des preuves très proches, que nous ne détaillerons donc pas...
- On notera $a \in \overline{R}$ pour dire que $a \in \mathbb{R}$ ou a est $+\infty$ ou $-\infty$.

1) Opérations sur les limites

Les mêmes que pour les suites, avec les mêmes formes indéterminées : se reporter au chapitre sur les suites convergentes pour plus de détail.

2) Relation d'ordre et limites

a) Passage à la limite dans les inégalités

Theorème 1 :

Soit $a \in \overline{R}$.
Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ avec $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$.
Alors f est strictement positive au voisinage de a.
De même, si $\ell < 0$ ou $\ell = -\infty$, alors f est strictement négative au voisinage de a.

▷ *Preuve* : La même que pour les suites.... ◁

Corolaire 2 : compatibilité avec la relation d'ordre

Soient f et g deux fonctions telles que au voisinage d'un $a \in \overline{\mathbb{R}}$ on a $f \leq g$.
Alors si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existent on a

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

En particulier : si au voisinage de a, $\exists M \in \mathbb{R}, f(x) \geq M$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq M$. (resp. si $f(x) \leq M$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq M$.)

▷ *Preuve* : On applique le théorème précédent à la fonction $f - g$ et on raisonne par l'absurde (même démo que pour les suites). ◁

b) Théorème des gendarmes ou théorème de l'encadrement

Theorème 2 :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a et telles que pour tout x de ce voisinage on ait

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si f et h admettent une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a, alors g admet une limite également et on a $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} g = \lim\limits_{a} h = \ell$.

▷ *Preuve* : La même que pour les suites. ◁

Exemple :
$\lim\limits_{x \to 0} x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

c) Limite par majoration ou minoration

Theorème 3 :
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g deux fonctions définies au voisinage de a et telles que pour tout x de ce voisinage on ait

$$f(x) \leq g(x)$$

- si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
- si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple :
Limite en $+\infty$ de $f(x) = x + \sin(x)$.

3) Composition et limites

a) Composée de deux fonctions

Theorème 4 :
Soient f et g deux fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ alors

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = c$$

▷ *Preuve* : Par exemple pour le cas $b = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$:

◁

Exemple :
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2+x+1}$

b) Limite de fonction et suite

Theorème 5 : Caractérisation séquentielle de la limite

Soit f une fonction définie sur un domaine D_f et $a \in D_f$ ou au bord de D_f.
Alors les deux phrases suivantes sont équivalentes :

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$
2. pour toute suite (u_n) à valeur dans D_f telle que $\lim u_n = a$, on a $\lim f(u_n) = b$

▷ *Preuve* :

◁

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \sin(\frac{1}{n})$.

Corolaire 3 :

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeur dans l'ensemble de définition de f et telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$.
Si $\lim f(u_n) = \ell$ et $\lim f(v_n) = \ell'$ avec $\ell \neq \ell'$, alors la fonction n'a pas de limite en x_0.

▷ *Preuve* :
C'est la contraposée du sens direct du théorème précédent. ◁

Exemples :

- Soit $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- La fonction cos n'admet pas de limite en $+\infty$:

4) Théorème de la limite monotone :

C'est l'analogue du théorème déjà connu pour les suites :

Theorème 6 :

Soit f une fonction croissante sur un intervalle $I =]a, b[$ avec $a < b$, a et b réels ou infinis.
Alors :

(i) $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existe.
Elle est finie si et seulement si f est majorée et on a alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \sup\limits_I f$

(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existe.
Elle est finie si et seulement si f est minorée et on a alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \inf\limits_I f$.

▷ *Preuve* : Même idée que les suites... cf le chapitre concerné. ◁

Corolaire 4 :

Tout fonction monotone sur un intervalle $]a, b[$ admet des limites (éventuellement infinies) en a^+ et en b^-.

▷ *Preuve* : si f est croissante c'est le théorème. Si f est décroissante alors $-f$ et croissante. On applique le théorème à $-f$ avant de revenir à f. ◁

⚠ Il s'agit bien de limites à droite ou à gauche, il est possible que la limite tout court n'existe pas !

III Méthodes élémentaires de calculs de limites

1) Limite en un point

a) Cas des fractions rationnelles

Méthode : **FORME 0/0 DANS UNE FRACTION RATIONNELLE**

Si la limite en un point $a \in \mathbb{R}$ donne une forme $0/0$, il suffit de factoriser le numerateur et dénominateur par $(x-a)$ et de simplifier jusqu'à lever l'indétermination.

En effet, si la forme obtenue donne $\dfrac{0}{0}$, c'est que a est racine du polynôme au numérateur et aussi de celui du dénominateur. Donc $(x-a)$ divise l'un et l'autre.
Cette méthode marche TOUT LE TEMPS.

Exemple :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} \frac{2x^2+3x-2}{x^2+4x+4}$

b) Limites associées à des dérivées

Rappel :
si f est dérivable en un point a, alors

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Proposition 3 : Limites usuelles en 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

c) Changement de variable :

Méthode : **COMMENT SE RAMENER À UNE LIMITE EN 0**

Si le calcul de limite est en un point autre que 0 et que l'on veut se ramener en 0, on effectue un changement de variable :

- Si la limite est en $a \in \mathbb{R}$, on pose $h = x - a$.
  Alors $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(h + a)$.
- si la limite est en $+\infty$, on pose $h = \frac{1}{x}$. Alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{h \to 0^+} f\left(\frac{1}{h}\right)$.
- si la limite est en $-\infty$, on pose $h = \frac{1}{x}$ et alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{h \to 0^-} f\left(\frac{1}{h}\right)$.

Exemples :

- $\lim_{x \to 2} \frac{\sin(2 - x)}{x - 2}$

- $\lim_{x \to +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})$

2) Limites en $+\infty$ ou en $-\infty$

On rappelle le resultat des croissances comparées :

Proposition 4 :

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ deux réels.

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0$
3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{e^{\beta x}} = 0$
4. $\lim_{x \to 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$

Les limites ci dessus, et seulement celles-ci, sont appelées "croissances comparées"

Technique élémentaire : Repérerer les termes “les plus forts” et factoriser par ceux-ci

Exemple :

1. $\lim_{x \to +\infty} e^x - x^3 =$
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 + 3x + 2}{x^2 + 1 + \ln x} =$

IV Fonctions continues

1) Définitions

a) Continuité en un point

Définition :

- Soit I un intervalle et $a \in D_f$. Soit f une fonction définie sur I (et donc en a). On dit que f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

  On a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue sur D si et seulement si $\forall a \in D$, f est continue en a.

Remarque :
Le fait que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ est une conséquence de la définition : c'est l'existence de cette limite qui fait qu'elle vaut $f(a)$... Il n'y a en quelque sorte "pas le choix".

Notation
On note $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ (ou simplement $\mathcal{C}(D)$) l'ensemble des fonctions continues sur D à valeur dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

- Les fonctions polynômiales sont continues :

- On a déjà montré que cos et sin sont dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
- En fait, la plupart des fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition...

b) Continuité à droite ou à gauche

Définition :
On dit que f est continue à droite (resp. à gauche) en a si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$)

Remarque :
Cette fois, il faut inclure dans la définition que la limite est bien $f(a)$: la limite à droite exclut a et le raisonnement effectuée pour la continuité "tout court" n'est plus possible.

Exemple :
Soit $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ on a vu que si $a \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor = f(a)$: on a donc f continue à droite.

En revanche, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor - 1 \neq f(a)$, donc f n'est pas continue à gauche.

Proposition 5 :
Soit $a \in D_f$ tel que a n'est pas une extrémité de I alors f est continue en a ssi f est continue à droite et à gauche

▷ *Preuve* :

◁

Exemple :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \sin x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

c) Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et soit $a \notin D_f$ mais tel que f admet en a une limite finie ℓ.
On dit qu'on prolonge f par continuité en choisissant pour valeur de f en ce point a la limite trouvée. :
$$\begin{aligned} D_f \cup \{a\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_f \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction ainsi définie est continue en a (puisqu'elle admet une limite en ce point et que a est maintenant dans le domaine de définition....), et on la note habituellement de la même façon que f.

Exemples :

- Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

▶ Soit $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$.

Remarque :
Par unicité de la limite, un prolongement par continuité ne se fait que d'une seule façon, justifiant encore une fois qu'on identifie f et son prolongement...

2) Théorème généraux

a) Opérations usuelles :

Proposition 6 :
Soit f et g deux fonctions continues sur D et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

1. $\lambda f + \mu g$ est continue sur D
2. fg est continue sur D
3. $\dfrac{f}{g}$ est continue en tout point de D où g ne s'annule pas

▷ *Preuve* : Immediat par propriété calculatoire sur les limites. ◁

Exemple :
Les fractions rationnelles sont continues, en tant que quotient de fonctions continues, tout comme la fonction tan.

b) Composition

Proposition 7 :
Soif $f : D \to G$ continue sur D et $g : H \to I$ continue sur H avec $G \subset H$, alors

$$g \circ f : D \to I \text{ est continue sur } D$$

▷ *Preuve* : C'est la composition de limite... ◁

Exemple :
Soit f définie par $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$.

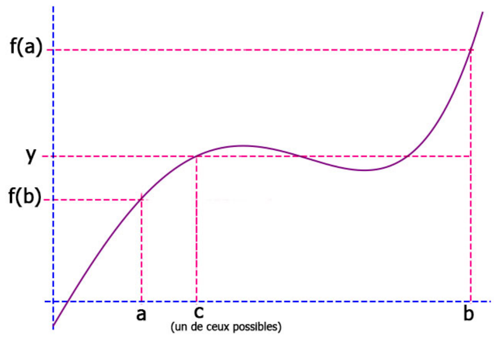
V Les grands théorèmes autour de la continuité

1) Théorème des valeurs intermédiaires

a) Enoncé :

Theorème 7 :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins un) c dans l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = y$

▷ *Preuve* : Voir TD ! ◁

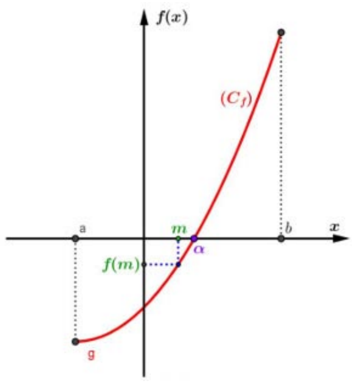


b) Recherche de zéros de fonctions par dichotomie

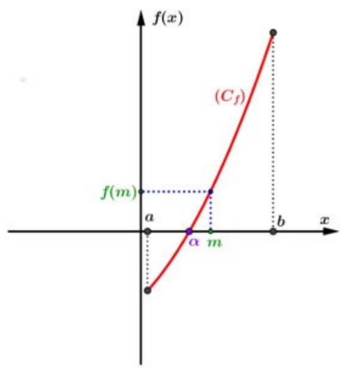
Soit f continue sur un intervalle $[a, b]$. On cherche α tel que $f(\alpha) = 0$ (on dit alors que α est un zero de f)
Si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$: le problème est résolu.
Si par exemple $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors comme 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$: le problème a donc au moins une solution.

Posons $m = \dfrac{a+b}{2}$. On calcule $f(m)$ et on a trois situations :

- Si $f(m) < 0$, alors f s'annule dans $[m, b]$. On recommence à l'étape précédente en posant $a = m$.



- Si $f(m) > 0$, alors f s'annule dans $[a, m]$ et on recommence en posant $b = m$



- Si $f(m) = 0$, alors on s'arrête... En pratique, ce cas ne se produit que rarement, car on utilise l'algorithme de dichotomie dans des cas où le zero est difficile à trouver....

A chaque étape, la taille de l'intervalle est divisée par 2, ce qui fait qu'en n étapes, on trouve un zero de f à $\dfrac{b-a}{2^n}$ près : c'est une estimation très précise et rapide !

c) Exemple d'étude de suites définies implicitement :

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. *Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique dans $[1, n]$ qu'on notera x_n.*
2. *Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\geq 1}$ puis sa limite.*
3. *Montrez que pour tout $n \geq 1$, on a : $f(n - \ln(n)) \leq n$. En déduire que $n - \ln(n) \leq x_n$.*
4. *Déterminer $\lim \dfrac{x_n}{n}$.*

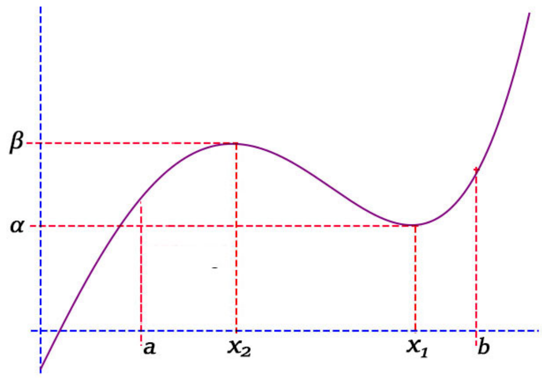
2) Image d'un intervalle par une fonction continue

Theorème 8 :
Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle.

▷ *Preuve* :

◁

Theorème 9 :
Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé ($a, b \in \mathbb{R}$), alors $f(I)$ est un intervalle de la forme $[\alpha, \beta]$ avec $\alpha = \min_I f$ et $\beta = \max_I f$
Autrement dit : sur tout intervalle fermé et borné, f est bornée et atteint ses bornes : il existe $x_1 \in [a, b]$ tel que $f(x_1) = \min f$ et $x_2 \in [a, b]$ tel que $f(x_2) = \max f$.



▷ *Preuve* : On admet. Il s'agit de fonctionner via des suites bien choisies, mais c'est assez technique... ◁

Danger ! **Importance de la fermeture de l'intervalle**
Le fait que l'intervalle soit fermé est essentiel. On a des contre-exemples faciles pour les cas non fermés :

- Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. La fonction f est continue sur $]0, 1]$, mais l'image de $]0, 1]$ est $[1, +\infty[$: elle n'est pas bornée.
- Soit $f : x \mapsto x^2$. La fonction f est continue sur $]-1, 1[$ et l'image de $]-1, 1[$ est $[0, 1[$. Ainsi, la fonction est effectivement bornée, mais la borne 1 n'est pas atteinte sur $]-1; 1[$.

Exemple d'utilisation :
Soit $f(x) = x^2 - 3x + 2$. On veut déterminer l'image de l'intervalle $[-1, 1]$.

3) Continuité et bijections :

Theorème 10 :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si f est strictement monotone, alors f est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.
En outre, l'application réciproque, f^{-1} est également continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

▷ *Preuve* : On a déjà tout démontré : il reste juste la continuité mais on l'admet. ◁

Exemples :

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue, comme quotient de fonction continue. Donc $x \mapsto \ln(x)$ est continue, en tant que primitive.
  Et donc exp est continue, en tant que fonction réciproque d'une fonction continue.
- De même, les racines n-nième et les fonctions trigonométriques réciproques sont des fonctions continues !