Analyse - Chapitre 7 : Suites - limites.
- Feuilles d'exercices -

Exercice 1 :

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse

1. Une suite est toujours majorée ou minorée.
2. Toute suite convergente est monotone (eventuellement APCR).
3. Le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite quelconque converge vers 0.
4. Une suite positive qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
5. Si la suite $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l ou $-l$.
6. Si la suite $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et convergent vers la même limite.
7. Si (u_n) et (v_n) sont des suites divergentes, alors $(u_n + v_n)$ est divergente.
8. Si (u_n) et (v_n) sont des suites divergentes, alors $(u_n \times v_n)$ est divergente.

Exercice 2 :

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles convergentes respectivement vers ℓ et ℓ'.
On pose $u_n = \min(a_n, b_n)$ et $v_n = \max(a_n, b_n)$. Déterminez les limites de (u_n) et (v_n).

Exercice 3 :

Calculez, si elles existent, les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.
2. $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{1+n^2+n^3}$.
3. $u_n = \dfrac{4n^4+3n^2+1}{n^2+n^3-2n^4}$.
4. $u_n = \dfrac{|\sin(n)|}{n+1}$.
5. $u_n = \dfrac{2^n}{n^5+3n+1}$.
6. $u_n = \dfrac{2^n+n}{2^n}$.
7. $u_n = n^2(\dfrac{1}{2})^n \sin(n!)$.
8. $u_n = n^2 - n\cos n + 2$.
9. $u_n = \sqrt{\dfrac{n^2+1}{n+3}}$.
10. $u_n = (n-3)\sqrt{\dfrac{n^3+1}{n^2+3}}$.
11. $u_n = 4n - \sqrt{n^2+1}$.
12. $u_n = n - \sqrt{n^2+1}$.
13. $u_n = (n^4+1)(n^3+2)e^{-n}$.
14. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n+1}$.
15. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Exercice 4 :

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies conjointement par $u_0 = 0$ et $v_0 = 2$ et les relations :

$$u_n = \frac{3u_{n-1}+v_{n-1}}{4} \qquad v_n = \frac{u_{n-1}+3v_{n-1}}{4}$$

1. Etudiez la suite $(u_n - v_n)$ et montrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Exprimez le terme général de la suite $t_n = u_n + v_n$. En déduire la limite de (u_n) et (v_n).

Exercice 5 :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$$

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$
2. Montrez que les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes vers une même limite.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 1/x + x$. On considère la suite définie par récurence par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Verifiez que la suite est bien définie.
2. Montrez que la suite (u_n) est monotone et calculez sa limite éventuelle.

Exercice 7 : Modèle logistique

Soient $b > 0$ et $a \in [0, \frac{1}{b}]$ deux réels, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = a, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = 2u_n(1 - bu_n) \end{cases}$$

Montrez que selon les valeurs de a, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ou $\frac{1}{2b}$ (on distinguera les cas $a \leq \frac{1}{2b}$ et $a > \frac{1}{2b}$)

Exercice 8 : Algorithme de Babylone

Soit $a > 1$, et $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$.

1. Etudiez les variations de f et le signe de $f(x) - x$ en fonction de x.
2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrez que pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq \sqrt{a}$, puis que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et enfin que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.
3. Ecrire un programme en Python, admettant deux arguments, n et a, et qui permet de calculer u_n.
4. Application numérique : calcul approché de $\sqrt{2}$.
   a) Posons $a = 2$. Calculez (à l'aide du programme précédent) u_1,u_2,u_3, u_4 et comparez ces nombres à $\sqrt{2}$.
   b) Montrez que pour tout $n \geq 0$, on a $0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq 10^{-(2^n - 1)}$.
   c) Soit $p \in \mathbb{N}$. A partir de quel n u_n est-elle une approximation à 10^{-p} de $\sqrt{2}$?
   Application numérique : calculez n pour $p = 100$ puis pour $p = 1000$. Cela vous semble-t-il un moyen efficace d'approcher $\sqrt{2}$?

Exercice 9 :

Soit (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminez f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ et représentez graphiquement la fonction f, la première bissectrice et les premiers termes de la suites.
2. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Soit $h = f \circ f$. Montrez que ces suites vérifient les relations de récurrence : $v_{n+1} = h(v_n)$ et $w_{n+1} = h(w_n)$.
3. Calculez explicitement h, et étudiez les convergences des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En déduire que u_n ne converge pas.

Exercice 10 : un calcul de limite un peu plus complexe

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrez que la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{2^k}$$

est convergente et déterminez sa limite.