DM 4*- Polynômes

Cet exercice est inspiré de classiques de sujets (écrit ou oraux) de concours type "Centrale-Supelec" ou plus.
Je l'ai détaillé bien plus que dans sa version pour élèves de fin de deuxième année, mais la technique utilisée est toujours la même.
Vous trouverez de nombreux exemples d'équations similaires sur le net, avec des corrigés, mais essayez déjà de chercher avec mon guide. Je préfère que vous me posiez des questions plutôt que vous vous "divulgachiez" la solution sur internet...

Exercice 1 On se propose résoudre l'équation polynomiale d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$ suivante :

$$P(X^2) = P(X)P(X-1)$$

Remarquons déjà que le polynôme nul est solution. Dans toute la suite de l'exercice, on suppose donc P non nul.

1. Soit $n = deg(P)$. Quel est le degré de $P(X^2)$? De $P(X-1)$? En déduire... qu'on ne peut pas raisonner aussi simplement sur le degré que dans les autres exercices qu'on a fait !
2. Quels sont les polynômes constants solutions de cette équation ?
3. On suppose désormais P non constant.
   a) Justifiez que P admet une racine $\alpha \in \mathbb{C}$.
   b) Montrez que α^2 est racine également, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est racine.
   c) En déduire que $|\alpha| = 0$ ou $|\alpha| = 1$. On pourra raisonner par l'absurde.
   d) Montrez que $(\alpha+1)^2$ est racine également. En déduire que $|\alpha+1| = 1$ ou $|\alpha+1| = 0$
   e) Résoudre géométriquement le système d'équation
   $$\begin{cases} |z| & = 1 \\ |z+1| & = 1 \end{cases}$$
   f) Déduire de tout ce qui précède que $\alpha \in \{0, -1, j, \bar{j}\}$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
4. En utilisant la question précédente, écrire l'allure de la décomposition primaire de Pdans $\mathbb{C}[X]$.
5. En remplaçant dans l'équation de départ, montrez que 0 et -1 sont d'ordre de multiplicité nulle, et que j et $\bar{j}$ sont de même ordre de multiplicité.
6. En déduire que les polynômes non nul solutions de l'équation sont tous les polynômes de la forme

$$P = (X^2 + X + 1)^m \text{ avec } m \in \mathbb{N}$$

---

1. Si $n = deg(P)$, alors $deg(P(X^2)) = 2n$ et $deg(P(X-1)) = n$, les deux par composition de polynome.
   Par produit, $deg(P(X)P(X-1)) = 2n$ et donc si P est solution de l'équation, c'est à dire si $P(X^2) = P(X)P(X-1)$, on obtient comme relation sur les degrés.... $2n = 2n$... Donc aucune information !
2. Si P est constant, alors $P(X) = c$ avec $c \in \mathbb{C}$, donc $P(X^2) = c$ et $P(X-1) = c$.
   Ainsi, si P est solution de l'équation polynomiale, on a $c = c^2$, c'est à dire $c = 0$ ou $c = 1$.
   Les deux seuls polynômes constants sont donc $P = 0$ ou $P = 1$.
3. a) Si P est non constant, le theorème de d'Alembert Gauss garantit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ qui est racine de P.
   b) Comme $P(X^2) = P(X)P(X-1)$, on a
   $$P(\alpha^2) = \underbrace{P(\alpha)}_{=0} P(\alpha - 1) = 0$$
   Ainsi, α^2 est racine.
   Montrons par récurrence que α^{2^n} est racine pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On vient de faire l'initialisation.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(\alpha^{2^n} = 0$.
   Alors
   $$P\left(\left(\alpha^{2^n}\right)^2\right) = \underbrace{P(\alpha^{2^n})}_{=0} P(\alpha^{2^n} - 1) = 0$$
   Donc $\left(\alpha^{2^n}\right)^2 = \alpha^{2^n \times 2} = \alpha^{2^{n+1}}$ est racine à son tour.
   On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} racine de P.

c) Supposons que $|\alpha| \notin \{0, 1\}$. Pour simplifier, posons $r_n = |\alpha^{2^n}| = |\alpha|^{2n}$
Cette suite est extraite d'une suite géométrique de raison $|\alpha|$ non nulle et non égal à 1 : la suit e est donc strictement monotone (strictement croissante si $|\alpha| > 1$, strictement décroissante si $|\alpha| < 1$) et donc si $n \neq p$, $r_n \neq r_p$.

Autrement dit, tous les modules de nos racines sont distincts. Les racines sont donc toutes distinctes, et il y en a une infinité !

C'est absurde : notre polynôme n'est pas constant, donc pas nul.

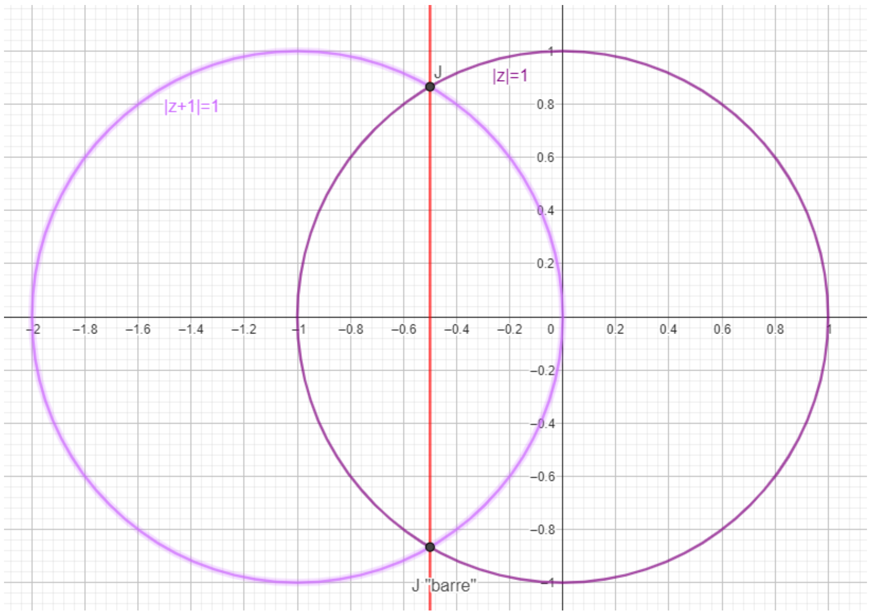
Conclusion : $|\alpha = 0|$ ou $|\alpha| = 1$.

d) Pardon pour l'erreur d'énoncé ! Il fallait lire $(\alpha + 1)^2$ est racine...
Cela provient simplement de $P((\alpha+1)^2) = P(\alpha+1)\underbrace{P(\alpha+1-1)}_{=0} = 0$

D'après le raisonnement précédent, les racines sont toutes nulles ou de module 1, donc $|(\alpha+1)^2| = 0$ ou $|(\alpha+1)^2| = 1$. Comme $|(\alpha+1)^2| = |\alpha+1|^2$, on en déduit $|\alpha+1| = 0$ ou $|\alpha+1| = 1$.

e) Les points d'affixes z vérifiant $|z| = 1$ sont le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.
Ceux dont l'affixe vérifient $|z+1| = 1$ sont le cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon 1 également.

On cherche donc l'intersection de ces deux cerclces :



Les points sont donc sur la mediatrice du segment reliant les deux centres, c'est à dire la droite d'équation $x = \frac{-1}{2}$. On cherche donc les deux points du disque trigonométrique dont l'abscisse est $-\frac{1}{2}$. Cela correspond au point d'affixe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$, soit, avec les notations que vous connaissez désormais, j et $\bar{j}$.

f) Il y a 4 systèmes à envisager, mais il est déjà impossible que $|z| = 0$ et $|z+1| = 0$ simultanément.
Il reste donc 3 cas : $|z| = 0$ et $|z+1| = 1$, ce qui donne $z = 0$, $|z| = 1$ et $|z+1| = 0$, ce qui donne $z = -1$ et enfin $|z| = 1$ et $|z+1| = 1$ qui donne $z = j$ ou $z = \bar{j}$

4. D'après le cours, la décomposition primaire de P est donc de la forme

$$P = aX^k(X+1)^\ell(X-j)^m(X-\bar{j})^n$$

avec k, l, m et n entiers, et $a \in \mathbb{C}$

5. Si P est solution, alors $P(X^2) = P(X)P(X-1)$. En remplaçant par la décomposition primaire obtenue précédemment, il vient

$$\begin{aligned} aX^{2k}(X^2+1)^\ell(X^2-j)^m(X^2-\bar{j})^n &= aX^k(X+1)^\ell(X-j)^m(X-\bar{j})^n \\ &\qquad \times a(X-1)^k(X)^\ell(X-1-j)^m(X-1-\bar{j})^n \\ &= a^2X^{k+\ell}(X+1)^\ell(X-1)^k(X-j)^m \\ &\qquad \times (X-\bar{j})^n(X-1-j)^m(X-1-\bar{j})^n \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition primaire, on a déjà $a^2 = a$.
Comme $a \neq 0$, on a $\boxed{a=1}$.
De plus, -1 n'est pas racine du terme de gauche. Il est donc d'ordre zero dans le terme de gauche, et donc d'ordre 0 à droite. Ainsi $\boxed{\ell = 0}$.
Toujours par unicité, comme $2k = k + \ell$, on en déduit $\boxed{k=0}$ également.
Ainsi, 0 et -1 ne sont pas racines de P (et sont donc de multiplicité nulle).
Il reste donc

$$(X^2-j)^m(X^2-\bar{j})^n = (X-j)^m(X-\bar{j})^n(X-1-j)^m(X-1-\bar{j})^n$$

Or $j^2 = \bar{j}$ et $(\bar{j})^2 = j$, donc $(X^2-j) = (X-\bar{j})(X+\bar{j})$ et $(X^2-\bar{j}) = (X-j)(X+j)$.
On a donc

$$(X-\bar{j})^m(X+\bar{j})^m(X-j)^n(X+j)^n = (X-j)^m(X-\bar{j})^n(X-1-j)^m(X-1-\bar{j})^n$$

A nouveau, l'unicité garantie que $\boxed{m=n}$ et $n = m$: j et $\bar{j}$ ont même ordre de multiplicité.
Notez enfin que $-1-j = \bar{j}$ et $1-\bar{j} = j$ (on peut le vérifier à la main, mais aussi simplement parce que $j^2+j+1=0$....)
(ouf ! c'était la pire question de ce DM....)

6. Comme P s'écrit sous la forme $(X-j)^m(X-\bar{j})^m$ et comme $(X-j)(X+j) = X^2+X+1$, on en déduit que $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $P = (X^2+X+1)^m$
On vérifie (enfin !) que pour tout m, un tel P convient, en vérifiant, par le calcul que $P(X)P(X-1) = (X^4+X^2+1)^m$