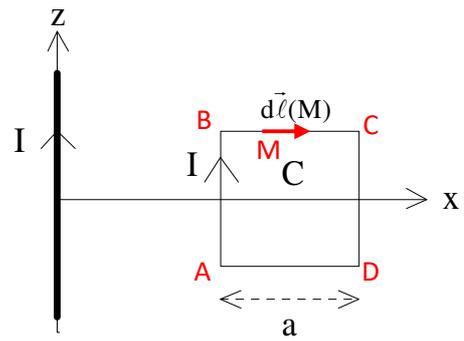


5.3.2 Dipôle magnétique-Exercice 2

Un cadre carré de côté de longueur a parallèles à Ox et Oz , parcouru par un courant I , est soumis au champ magnétique d'un fil infini parcouru par un courant I identique. Le centre C du carré est sur l'axe Ox à la distance $x \gg a$ du fil.

Déterminer la résultante des forces exercées par le fil sur le cadre :

- a-En utilisant la loi de Laplace.
- b-En utilisant le concept de dipôle magnétique.



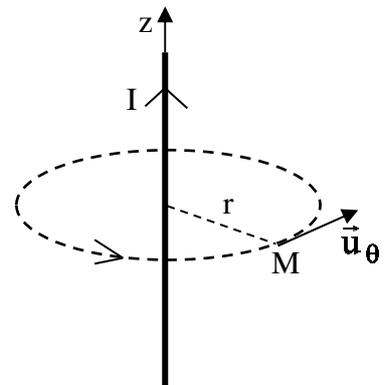
Rappel : force subie par un dipôle magnétique de moment \vec{M} dans un champ extérieur \vec{B} : $\vec{F} = \text{grad}(\vec{M} \cdot \vec{B})$

Calcul préliminaire : champ magnétique créée par un fil rectiligne infini

- Invariance des courants par translation selon Oz et rotation autour de Oz .
Donc : $\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$
- Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie des courants : $\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$
- Théorème d'Ampère pour le cercle de rayon r passant par M :

$$\oint_{(C)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{r}(M) = \mu_0 I_{\text{à travers}(C)} \Rightarrow 2\pi r B_\theta(r) = \mu_0 I$$

$$\text{Donc : } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$



En appliquant cette formule au schéma de l'énoncé, on aura : $\vec{u}_\theta = \vec{u}_y$

$$\begin{aligned} \text{a- } \vec{F}_{\text{fil} \rightarrow \text{cadre}} &= \oint_{\text{cadre}} I d\vec{\ell}(M) \wedge \vec{B}(M) \\ &= \int_A^B I dz \vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi(x - \frac{a}{2})} \vec{u}_y + \int_B^C I dr \vec{u}_x \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_y + \int_C^D I dz \vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi(x + \frac{a}{2})} \vec{u}_y + \int_D^A I dr \vec{u}_x \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_y \end{aligned}$$

Les intégrales sur BC et sur DA se compensent car leurs bornes sont opposées. Il reste :

$$\vec{F}_{\text{fil} \rightarrow \text{cadre}} = -\frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi(x - \frac{a}{2})} \vec{u}_x + \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi(x + \frac{a}{2})} \vec{u}_x = -\frac{\mu_0 I^2 a(x + \frac{a}{2} - x + \frac{a}{2})}{2\pi(x^2 - \frac{a^2}{4})} \vec{u}_x$$

$$\text{On a } x \gg a, \text{ donc finalement : } \vec{F}_{\text{fil} \rightarrow \text{cadre}} = -\frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi x^2} \vec{u}_x$$

b- $x \gg a$: le cadre se présente comme un dipôle magnétique de moment $\vec{M} = Ia^2 \vec{u}_y$

$$\text{On a : } \vec{F}_{\text{fil} \rightarrow \text{cadre}} = \text{grad}(\vec{M} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{M} \cdot \vec{B} = Ia^2 \vec{u}_y \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{u}_y = \frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi x} \text{ puis } \text{grad}(\vec{M} \cdot \vec{B}) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi x} \right) \vec{u}_x = -\frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi x^2} \vec{u}_x$$

$$\text{On retrouve : } \vec{F}_{\text{fil} \rightarrow \text{cadre}} = -\frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi x^2} \vec{u}_x$$