Physique

Capacité numérique 3 – Équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire

Pour le lundi 11 mars 08:00

Pour rendre vos travaux (1 rendu par groupe de 3 maximum) :
— *les réponses aux questions « classiques »* ***par écrit****;*
— *les codes à envoyer par mail à* `l.torterotot.edu@gmail.com` *au format*

CN-Ordre_2_non_lineaire-X.py

en remplaçant ***X*** *par le ou les noms des auteurs du code. Les codes doivent générer les images eux-mêmes.*

Objectifs

- À l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaître l'effet des termes non-linéaires.
- Utiliser la fonction `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate`.
— Transformer une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel de n équations d'ordre 1.

Première partie

Pendule simple

Cette partie étudie le modèle du pendule simple. En notant θ l'angle du pendule par rapport à la verticale descendante, cet angle est régi par l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0\,. \tag{1}$$

1 Étude préliminaire

1. Pourquoi n'est-il pas possible d'appliquer la méthode d'Euler pour estimer l'évolution de θ ?

Pour pallier cela, une matrice 2×1, notée X, est introduite et définie telle que

$$X(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}\,.$$

2. Déterminer fonction F de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que l'équation (1) s'écrive

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(X)\,. \tag{2}$$

3. En déduire, en s'inspirant de la méthode d'Euler vue pour les systèmes d'ordre 1, les relations (mathématiques) permettant d'obtenir les valeurs de $\theta(t_{i+1})$ et $\dot{\theta}(t_{i+1})$ connaissant $\theta(t_i)$ et $\dot{\theta}(t_i)$ avec $t_i = pi$, p le pas de la simulation et i l'étape d'itération.

2 Mise en œuvre

1. Écrire le code définissant la fonction `F_pendule`, prenant comme paramètres la valeur `t` de t_i et la valeur `X` de $X(t_i)$ et qui rend $F(X(t_i))$ dans le cas du pendule simple étudié. Attention à bien identifier ce qu'est X. Poser $\omega_0 = 2\pi$ (c'est-à-dire $f_0 = 1\,\mathrm{Hz}$) en début du script.

2. Écrire une fonction `next_Euler` prenant comme paramètres la valeur `theta_init` de $\theta(t_i)$, la valeur `omega_init` de $\omega(t_i) = \dot{\theta}(t_i)$, la valeur `t_init` de t_i, la fonction `F` définie précédemment et le pas `p` et qui rend les valeurs de $\theta(t_{i+1})$, $\omega(t_{i+1})$ et t_{i+1}.

3. Soient les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$. Écrire alors un code permettant d'estimer les valeurs de $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$ de $t = 0$ à $t = 3T_0$ avec T_0 la période propre de l'oscillateur harmonique obtenue aux petites angles, avec un pas de $T_0/100$, pour θ_0 valant $1, 5, 10$ degrés et de sauvegarder les tracés de ces estimations, ensemble, dans une image « `fig1a.png` ». Commenter le résultat obtenu : périodes, amplitudes.

4. Reprendre la question précédente avec un pas de $T_0/1000$, dans une image « `fig1b.png` ». Le problème rencontré est-il résolu ?.

5. Tracer à présent les courbes pour θ_0 valant $10, 30, \ldots, 150$ degrés dans une image « `fig2.png` ». Commenter le résultat obtenu:périodes, amplitudes.

6. Tracer à présent la courbe pour $\theta(0) = 170°$ dans une image « `fig3.png` ». Commenter.

3 Utilisation de `odeint`

La bibliothèque `scipy.integrate` comporte une fonction `odeint` dont la documentation complète est disponible en ligne[1]. Pour un système tel que $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(X)$ avec X pouvant être un vecteur, son utilisation peut être simplifiée, avec les lignes nécessaires en amont, en

```python
from scipy.integrate import odeint # import de la fonction
X0 = (theta_init, omega_init) # le vecteur X à l'instant initial, comme avant
temps = ... # la liste des instants t auxquels obtenir X(t)
X_liste = odeint(F, X0, temps)
```

avec `F` une fonction qui n'est pas tout à fait celle précédemment définie dans ce sujet. En effet, celle-ci doit prendre deux paramètres, `X` et `temps`. Il faudra donc « mettre à jour » `F` dans le code pour utiliser `odeint`.

La sortie de `odeint` est alors un `array` de taille `len(temps),len(X0)` contenant les valeurs de X pour tous les instants t dans `temps`.

1. Écrire alors un code permettant d'obtenir les valeurs de $\theta(t)$ de $t = 0$ à $t = 3T_0$ avec T_0 la période propre de l'oscillateur harmonique obtenue aux petites angles, avec un pas de $T_0/100$, pour θ_0 valant $10, 30, \ldots, 170$ degrés et de sauvegarder les tracés de ces simulations, ensemble, dans une image « `fig4.png` ». Commenter le résultat obtenu : périodes, amplitudes.

2. Obtenir alors, à partir des courbes calculées par `odeint`, le portrait de phase de ce système, dans une image « `fig5.png` ».

3. Ce portrait de phase n'est en fait pas complet, seuls les mouvements périodiques autour de $\theta = 0$ sont obtenus. Trouver un jeu de conditions initiales supplémentaires permettant de compléter le portrait de phase dans la gamme $-2\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ et $-\pi\omega_0 \leqslant \dot{\theta} \leqslant \pi\omega_0$ tout en conservant un visuel agréable (courbes ni trop espacées, ni trop rapprochées). Le sauvegarder dans une image « `fig6.png` ».

1. https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html

Deuxième partie
Oscillateur de Van der Pol

L'oscillateur de Van der Pol est régi par l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + a\left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y = 0\,. \tag{3}$$

Dans la suite, les paramètres seront fixés à $a = 3\,\mathrm{SI}$, $b = 1\,\mathrm{SI}$, $\omega_0 = 7\,\mathrm{rad/s}$.

4. Déterminer la fonction `F_VanderPol` utilisable avec `odeint`, analogue à `F_pendule_odeint` mais pour l'équation (3). Puis, en utilisant la méthode précédemment employée pour traiter le pendule simple avec `odeint`, obtenir $y(t)$ et $\dot{y}(t)$ pour t allant de 0 à 100 s avec 1000 points pour les conditions initiales $y(0) = 0\,\mathrm{rad}$ et $\dot{y}(0) = 0{,}1\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$.

Tracer $y(t)$ dans une image « `fig7a.png` » et le portrait de phase avec *ces* conditions initiales dans une image « `fig7b.png` ». Commenter le portrait de phase : à terme, $y(t)$ est-elle périodique ? Sinusoïdale ? Justifier.

5. Faire varier les conditions initiales. Que dire du régime permanent de l'oscillateur ? Prendre par exemple $y(0) = 2\,\mathrm{rad}$ et $\dot{y}(0) = 1\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ puis $y(0) = -1{,}75\,\mathrm{rad}$ et $\dot{y}(0) = 12\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$.