**DEVOIR SURVEILLÉ 5 – Sujet CCINP** 07/02/24 Durée 4h

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

***RAPPEL DES CONSIGNES***

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.**

# Exercice 1 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

et de calculer sa valeur.
On considère la fonction $f : [0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[, \quad f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[, \quad u(x,t) = -\frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt}.$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leqslant |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

## Partie I - Préliminaires

**Q1**. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F$ par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t.$$

La fonction $F$ est donc bien définie sur $]0,+\infty[$.

**Q2**. Soit $x \geqslant 0$. Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $]0,+\infty[$.

## Partie II - Calcul de $F$ sur $]0, +\infty[$

**Q3**. Déterminer la limite de $F$ en $+\infty$.

**Q4**. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction $F$ est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} \mathrm{d}t.$$

**Q5**. En déduire que la fonction $F$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in ]0, +\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

## Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1$ et $F_2$ définies par :

$$F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t.$$

**Q6**. Montrer que la fonction $F_1$ est bien définie et continue sur $[0, 1]$.

**Q7**. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

**Q8**. En déduire que $F_2$ est bien définie sur $[0, 1]$ et que pour tout $x \in [0, 1]$ :

$$F_2(x) = \frac{x\sin(1) + \cos(1)}{1 + x^2} e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2} dt.$$

**Q9**. Montrer que la fonction $F_2$ est continue sur $[0, 1]$.

**Q10**. En déduire que la fonction $F$ est bien définie et continue en 0.

En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

# Exercice 2 : La fonction dilogarithme

## Présentation générale

Dans cet exercice, on définit la fonction dilogarithme dans la première partie, puis on étudie son développement en série entière dans la partie suivante.

## Partie I - Existence de la fonction dilogarithme

Dans cette partie, on considère la fonction $f : ]0, +\infty[ \times ] - \infty, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (t,x) \in ]0, +\infty[ \times ] - \infty, 1], \quad f(t,x) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - x}.$$

**Q11**. Justifier que la fonction $f$ est bien définie sur $]0,+\infty[\times]-\infty,1]$.

**Q12**. Montrer que la fonction $t\mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

**Q13**. Soit $x\in]-\infty,1]$. En comparant les fonctions $t\mapsto f(t,x)$ et $t\mapsto f(t,1)$, montrer que $t\mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après les résultats précédents, on peut définir la fonction $L:]-\infty,1]\to\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in]-\infty,1],\quad L(x)=x\int_0^{+\infty}f(t,x)\mathrm{d}t.$$

Cette dernière est appelée fonction dilogarithme.

### Partie II - Développement en série entière

Dans cette partie, on montre que la fonction $L$ est développable en série entière.
On considère un nombre réel $x\in[-1,1]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit la fonction $s_n:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ par

$$\forall t\in]0,+\infty[,\quad s_n(t)=t\mathrm{e}^{-(n+1)t}x^n.$$

**Q14**. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}s_n(t)\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}s_n(t)\mathrm{d}t=\frac{x^n}{(n+1)^2}$.

**Q15**. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0}s_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall t\in]0,+\infty[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}s_n(t)=f(t,x).$$

**Q16**. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n^2}$ converge et déduire des questions précédentes que $\displaystyle L(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

# Exercice 3 : Étude de séries de pile ou de face

## Présentation générale

On considère un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité 1/2 et face avec la probabilité 1/2). Pour tout entier $k\in\mathbb{N}^*$, on désigne par $P_k$ l'évènement [le $k$-ième lancer de la pièce donne pile] et par $F_k$ l'évènement [le $k$-ième lancer de la pièce donne face].

On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n° 1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n° 2 commence au lancer suivant la fin de la série n° 1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.
Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

**Exemple 1 :** $$\underbrace{P_1\cap P_2}_{\text{Série n° 1}}\cap\underbrace{F_3}_{\text{Série n° 2}}\cap\underbrace{P_4\cap P_5\cap P_6\cap P_7}_{\text{Série n° 3}}\cap F_8\cap\cdots.$$

**Exemple 2 :** $$\underbrace{F_1\cap F_2\cap F_3}_{\text{Série n° 1}}\cap\underbrace{P_4\cap P_5\cap P_6\cap P_7\cap P_8}_{\text{Série n° 2}}\cap\underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty}F_k\right)}_{\text{Série n° 3}}.$$

## Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série.
On définit la variable aléatoire $L_1$ de la manière suivante :

— si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$ ;

— sinon, on désigne par $L_1$ la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'évènement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

**Q17**. Exprimer l'évènement $(L_1 = k)$ en fonction des évènements $P_i$ et $F_i$ pour $i \in [\![1, k+1]\!]$.

**Q18**. Montrer que $P(L_1 = k) = 2^{-k}$.

**Q19.** En déduire la valeur de $P(L_1 = 0)$.

## Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $N_n$ le nombre de séries apparues lors des $n$ premiers lancers.
Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4\,.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

### II.1 - Généralités

**Q20.** Déterminer les lois de $N_1$ et $N_2$.

**Q21.** Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire $N_n$ ?

### II.2 - Relation de récurrence pour la loi de $N_n$

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de $N_{n+1}$ et la loi de $N_n$.

**Q22.** Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Justifier que l'on a l'égalité d'évènements :

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\,,$$

puis en déduire que :

$$P\left((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left((N_n = k) \cap P_n\right)\,.$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ les relations :

$$P\left((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left((N_n = k) \cap F_n\right)\,,$$

$$P\left((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left((N_n = k-1) \cap P_n\right)\,,$$

$$P\left((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left((N_n = k-1) \cap F_n\right)\,.$$

**Q23.** En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ la relation :

$$P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(N_n = k) + \frac{1}{2} P(N_n = k-1)\,.$$

### II.3 - Fonction génératrice et loi de $N_n$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_m(x) = \sum_{k=1}^{m} P(N_m = k) x^k\,.$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_1(x) = x\,.$$

**Q24.** Déduire de **Q23** que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x)\,.$$

**Q25.** Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

**Q26.** À partir de l'expression de $G_n$, déterminer la loi de la variable aléatoire $N_n$.

# Exercice 4 : Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs.

À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0.

Ensuite, si le pion se trouve à l'étape $n$ sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n+1$, le pion a une chance sur deux de se trouver en $x+1$ et une chance sur deux de se trouver en $x-1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.

Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire $T$ définie de la façon suivante :

- si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$ ;
- sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'événement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide.

Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \text{ et } q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

## Partie I - Calcul de $p_n$

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

**27.** Que représente la variable aléatoire $S_n$ ?

**28.** Calculer $p_0$, $p_1$ et $p_2$.

**29.** Justifier que si $n$ est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire $Y_k$ définie par $Y_k = \dfrac{X_k + 1}{2}$.

**30.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $Y_k$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

**31.** Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et exprimer $S_n$ en fonction de $Z_n$.

**32.** On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente que :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}.$$

## Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On note $R_p$ le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n x^n$ et $f$ la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

**33.** Montrer que $R_p \geqslant 1$.

**34.** Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^{m} \left( -\frac{1}{2} - k + 1 \right).$$

**35.** Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1 - x^2)^\alpha$ pour tout $x \in ]-1, 1[$.

## Partie III - Loi de la variable aléatoire $T$

On note $R_q$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} q_n x^n$ et $g$ la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**36.** Calculer $q_1$ et $q_2$.

**37.** Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[-1,1]$. En déduire que $R_q \geqslant 1$.

Dans la suite, on **admet** la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}.$$

**38.** En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, montrer que :

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

**39.** En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in ]-1,1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1-x^2}$.

**40.** En déduire une expression de $q_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**41.** En utilisant les questions **Q37** et **Q39**, déterminer la valeur de $P(T = +\infty)$.
Interpréter le résultat.

**FIN**