CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 5 - Sujet 1

Exercice 1 : *Extrait CCP PC 2020*

Q1. Soit $x > 0$.
La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles.
Pour tout $t \in]0,+\infty[$, on a $|\sin(t)| \leqslant |t|$ donc $0 \leqslant |f(x,t)| = \left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt}$.
Or, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de référence avec $x > 0$).
Par comparaison, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(x,t)|\mathrm{d}t$ converge c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{la fonction } t \mapsto f(x,t) \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$$

Q2. Soit $x \geqslant 0$.
La fonction $t \mapsto u(x,t)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a pour tout $t \in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= -\frac{x\cos(t) - \sin(t)}{1+x^2}e^{-xt} - \frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2} \times (-x)e^{-xt}\\ &= \frac{-x\cos(t) + \sin(t) + x^2\sin(t) + x\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt}\\ &= \frac{(1+x^2)\sin(t)}{1+x^2}e^{-xt} = \sin(t)e^{-xt}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{la fonction } t \mapsto u(x,t) \text{ est bien une primitive de la fonction } t \mapsto \sin(t)e^{-xt} \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

Q3. Utilisons le théorème de convergence dominée à paramètre continu.
- Soit $t \in]0,+\infty[$. On a $\lim_{x\to+\infty} e^{-xt} = 0$ (car $t > 0$) donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin t}{t}e^{-xt} = 0 \in \mathbb{R}$ (produit par une constante).
- Soit $t \in]0,+\infty[$ et $x \in [1,+\infty[$.
  On a $0 \leqslant |f(x,t)| = \left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt} \leqslant e^{-t}$ (ne dépend pas de x).
  Or, la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est positive et d'intégrale convergente sur $]0,+\infty[$ (intégrale de référence avec $1 > 0$) donc $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On en déduit par le théorème de convergence dominée à paramètre continu que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} 0\mathrm{d}t = 0.}$$

Q4. Soit $a > 0$.
- Pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (d'après la question Q1 avec $x \geqslant a > 0$).
- Pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et pour tout $x \geqslant a$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)e^{-xt}.$$

— Pour tout $x \in [a, +\infty[$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |-\sin(t)e^{-xt}| \leqslant e^{-xt} \leqslant e^{-at} \text{ (ne dépend pas de } x\text{)}.$$

De plus, la fonction $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (car $a > 0$, intégrale de référence).

On en déduit par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et pour tout $x \geqslant a$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\mathrm{d}t$.

$$\boxed{F \text{ est dérivable sur } [a, +\infty[\text{ et pour tout } x \in [a, +\infty[,\ F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\mathrm{d}t.}$$

Q5. Comme F est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, F est dérivable sur $]0, +\infty[$ (la dérivabilité est une propriété locale) et on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt = -[u(x,t)]_0^{+\infty} = -\left(\lim_{t\to+\infty} u(x,t) - \lim_{t\to 0} u(x,t)\right) = -\left(0 + \frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

car pour tout $t > 0$, $0 \leqslant |u(x,t)| \leqslant \frac{x+1}{1+x^2}e^{-xt}$ et $\lim_{t\to+\infty} \frac{x+1}{1+x^2}e^{-xt} = 0$ d'où la limite en $+\infty$ par le théorème de limite par encadrement.

$$\boxed{F \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et pour tout } x \in]0, +\infty[,\ F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.}$$

La fonction F est une primitive de F' sur l'intervalle $]0, +\infty[$ donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $F(x) = -\arctan(x) + K$.
Comme on a vu que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$, on a $-\frac{\pi}{2} + K = 0$ donc $K = \frac{\pi}{2}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).}$$

Q6. Notons qu'on a pour tout $x \in [0, 1]$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$.
Utilisons le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
— Pour tout $t \in]0, 1]$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0, 1]$.
— Pour tout $t \in]0, 1]$, pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$|f(x,t)| = \left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt} \leqslant 1 \text{ (ne dépend pas de } x\text{)}.$$

La fonction constante $t \mapsto 1$ est continue par morceaux sur le segment $[0, 1]$ et donc intégrable sur $]0, 1]$.
On en déduit par le théorème de continuité des intégrales à paramètre que :

$$\boxed{\text{la fonction } F_1 \text{ est bien définie et continue sur } [0, 1].}$$

Q7. La fonction $t \mapsto \frac{u(x,t)}{t^2}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.
On a pour tout $t \geqslant 1$:

$$t^{3/2}\left|\frac{u(x,t)}{t^2}\right| = \left|\frac{x\sin(t) + \cos(t)}{1+x^2}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\right| \leqslant \frac{x+1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, $\left|\dfrac{u(x,t)}{t^2}\right| = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$.

De plus, pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^{3/2}} \geqslant 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$ converge (Riemann en $+\infty$ avec $\dfrac{3}{2} > 1$). Par comparaison, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge absolument c'est-à-dire :

$$\boxed{t \mapsto \frac{u(x,t)}{t^2} \text{ est intégrable sur } [1,+\infty[.}$$

Q8. Soit $x \in [0,1]$.

Les fonctions $w : t \mapsto u(x,t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ et on a pour tout $t \geqslant 1$: $w'(t) = \sin(t)e^{-xt}$ et $v'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$.

On a de plus :

$$|w(t)v(t)| = \left|\frac{u(x,t)}{t}\right| \leqslant \frac{x+1}{1+x^2}\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ donc } w(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \in \mathbb{R}.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} w(t)v'(t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} -\frac{u(x,t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge d'après la question précédente, on en déduit par intégration par parties que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x,t)dt = \int_1^{+\infty} w'(t)v(t)\mathrm{d}t$ converge et on a l'égalité :

$$F_2(x) = \int_1^{+\infty} u'(t)v(t)dt = \left[\frac{u(x,t)}{t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la fonction } F_2 \text{ est bien définie sur } [0,1] \text{ et pour tout } x \in [0,1] : \\ F_2(x) = \dfrac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x} + \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\mathrm{d}t.\end{array}}$$

Q9. Montrons que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est continue sur $[0,1]$.

— Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $x \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue sur $[0,1]$.

— Pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $t \in [1,+\infty[$,

$$\left|\frac{u(x,t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}\frac{x+1}{1+x^2} \leqslant \frac{2}{t^2} \text{ (ne dépend pas de } x\text{)}$$

car $0 \leqslant x+1 \leqslant 1$ et $1+x^2 \geqslant 1 > 0$.

De plus, la fonction $t \mapsto \dfrac{2}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann en $+\infty$ avec $2 > 1$).

On en déduit par le théorème de continuité des intégrales à paramètre que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est continue sur $[0,1]$.

De plus, $x \mapsto \dfrac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x}$ est continue sur $[0,1]$ (par opérations sur les fonctions usuelles).

Par somme de fonctions continues, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } F_2 \text{ est continue sur } [0,1].}$$

Q10. • Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, comme les intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ convergent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ converge et on a par la relation de Chasles :

$$F(x) = \int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t = F_1(x) + F_2(x).$$

Par somme de fonctions continues, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est bien définie et continue sur } [0,1] \text{ et donc en particulier en } 0.}$$

• On en déduit que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \text{ converge}}$ et elle a pour valeur $F(0)$.
Par continuité de F en 0 :

$$F(0) = \lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{\text{L'intégrale de Dirichlet a pour valeur } \frac{\pi}{2}.}$$

Exercice 2 : *Extrait CCP PC 2023*

Q11. Soit $(t,x) \in]0,+\infty[\times]-\infty,1]$.
On a $e^t > e^0 = 1$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ et $x \leqslant 1$.
On en déduit que $e^t - x > 0$.
Ainsi, le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[\times]-\infty,1]$ donc :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien définie sur }]0,+\infty[\times]-\infty,1].}$$

Q12. La fonction $t \mapsto f(t,1) = \dfrac{t}{e^t - 1}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ (par opérations).
Remarquons qu'elle est positive donc il suffit de prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,1)\mathrm{d}t$ converge.
En 0 : On a $e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t,1) = 1 \in \mathbb{R}$.
On en déduit que la fonction $t \mapsto f(t,1)$ est prolongeable par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0,1]$.
En $+\infty$: On a $t^2 f(t,1) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^3}{e^t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées donc $f(t,1) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (Riemann en $+\infty$ avec $2 > 1$).
On en déduit par comparaison que la fonction $t \mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } t \mapsto f(t,1) \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$$

Q13. La fonction $t \mapsto f(t,x) = \dfrac{t}{e^t - x}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ (par opérations).
On a pour tout $t \in]0,+\infty[$, $x \leqslant 1$ donc $e^t - x \geqslant e^t - 1 > 0$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ puis produit par $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant f(t,x) \leqslant f(t,1)$.
Comme la fonction $t \mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, on en déduit par comparaison par inégalité que :

$$\boxed{\text{la fonction } t \mapsto f(t,x) \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$$

Q14. La fonction $t \mapsto te^{-(n+1)t}x^n$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
Soit $y \in [0, +\infty[$.
Comme les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -\dfrac{1}{n+1}e^{-(n+1)t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0, y]$, on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^y te^{-(n+1)t}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{t}{n+1}e^{-(n+1)t}\right]_0^y + \frac{1}{n+1}\int_0^y e^{-(n+1)t}\mathrm{d}t = -\frac{y}{n+1}e^{-(n+1)y} + \frac{1}{n+1}\left[-\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)t}\right]_0^y \\ &= -\frac{1}{n+1}ye^{-(n+1)y} - \frac{1}{(n+1)^2}e^{-(n+1)y} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(n+1)^2} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

par croissances comparées car $n + 1 > 0$.
On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\mathrm{d}t$ converge et a pour valeur $\dfrac{1}{(n+1)^2}$.
Par linéarité (produit par x^n), on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t \text{ converge et } \int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}.}$$

Q15. Soit $t \in]0, +\infty[$.
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(e^{-t}x)^n$ est une série géométrique avec $|e^{-t}x| \leqslant e^{-t} < 1$ donc elle converge et a pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-t}x)^n = \frac{1}{1-e^{-t}x}.$$

Par linéarité (produit par te^{-t}), on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} s_n(t)$ converge et a pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}x} = \frac{t}{e^t - x}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{gathered}\text{la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 0} s_n \text{ converge simplement sur }]0, +\infty[\\ \text{et } \forall t \in]0, +\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(t, x).\end{gathered}}$$

Q16. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \left|\dfrac{x^n}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann avec $2 > 1$).
On en déduit par comparaison par inégalité que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n^2} \text{ converge (absolument).}}$$

Utilisons le théorème d'intégration terme à terme (interversion intégrale / somme infinie).

— D'après **Q15** et par linéarité, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} xs_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et a pour somme $t \mapsto xf(t, x)$.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction xs_n est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et d'après **Q14**, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\mathrm{d}t$ converge donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |xs_n(t)|\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}|x|^{n+1}\mathrm{d}t$ converge aussi par linéarité.

Ainsi, la fonction xs_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Notons que d'après **Q14**, on a aussi par linéarité :

$$\int_0^{+\infty} |xs_n(t)|\mathrm{d}t = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

— La série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |xs_n(t)|\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{|x|^n}{n^2}$ converge d'après ce qui précède.

Par le théorème d'intégration terme à terme, on en déduit que $t \mapsto xf(t,x)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et on a :

$$\int_0^{+\infty} xf(t,x)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} xs_n(t)\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire par linéarité :

$$\boxed{L(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.}$$

Exercice 3 : *Extrait CCINP PC 2022*

Q17. L'événement $(L_1 = k)$ se réalise si et seulement si les k premiers lancers donnent le même résultat et le $(k+1)$-ème donne un résultat différent.
Ainsi :

$$\boxed{(L_1 = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k} P_i \cap F_{k+1}\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i \cap P_{k+1}\right).}$$

Q18. Les événements $\bigcap_{i=1}^{k} P_i \cap F_{k+1}$ et $\bigcap_{i=1}^{k} F_i \cap P_{k+1}$ sont incompatibles donc :

$$P(L_1 = k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k} P_i \cap F_{k+1}\right) + P\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i \cap P_{k+1}\right).$$

Par indépendance des lancers de la pièce, on a alors :

$$P(L_1 = k) = \left(\prod_{i=1}^{k} P(P_i)\right) P(F_{k+1}) + \left(\prod_{i=1}^{k} P(F_i)\right) P(P_{k+1}) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Ainsi :

$$\boxed{P(L_1 = k) = 2^{-k}.}$$

Q19. Comme $L_1(\Omega) = \mathbb{N}$, $(L_1 = k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements donc en particulier, $\sum_{k=0}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1$.
Ainsi :

$$P(L_1 = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{1/2}{1-1/2} = 0$$

(somme géométrique de raison $1/2 \in]-1,1[$).

$$\boxed{\text{On a } P(L_1 = 0) = 0. \text{ Cela signifie que la série numéro 1 se termine presque sûrement.}}$$

Q20. En un lancer, une seule série peut être apparue donc N_1 est la variable aléatoire constante égale à 1.

$$\boxed{N_1(\Omega) = \{1\} \text{ et } P(N_1 = 1) = 1.}$$

En deux lancers, on peut obtenir une ou deux séries donc $N_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
L'événement $(N_2 = 1)$ se réalise si et seulement si les deux premiers lancers donnent le même résultat c'est-à-dire :

$$(N_2 = 1) = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2).$$

Les événements $P_1 \cap P_2$ et $F_1 \cap F_2$ sont incompatibles puis par indépendance des lancers, on obtient :

$$P(N_2 = 1) = P(P_1) \times P(P_2) + P(F_1) \times P(F_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

On a alors nécessairement $P(N_2 = 2) = 1 - P(N_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi :

$$\boxed{N_2 \text{ suit la loi uniforme sur } \{1, 2\} \text{ c'est-à-dire } N_2(\Omega) = \{1, 2\} \text{ et } P(N_2 = 1) = P(N_2 = 2) = \frac{1}{2}.}$$

Q21. Au cours des n premiers lancers, on obtient au minimum une série (dans le cas où les n lancers donnent le même résultat) et au maximum n séries (dans le cas où les n lancers donnent alternativement des résultats différents) et toutes les situations intermédiaires sont possibles (pour $k \in [\![1, n]\!]$, si l'on obtient par exemple pile au premier lancer, les résultats alternent jusqu'au k-ème lancer et on obtient le même résultat du k-ème au n-ème lancer alors l'événement $(N_n = k)$ se réalise).
Ainsi :

$$\boxed{N_n(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$

Q22. Si l'événement $P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé alors les lancers n et $n+1$ donnent le même résultat donc les lancers n et $n+1$ appartiennent à la même série et il y a donc autant de séries apparues lors des n premiers lancers que lors des $n+1$ premiers lancers.
On en déduit que :

$$\boxed{(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}.}$$

Les événements $(N_n = k) \cap P_n$ et P_{n+1} sont indépendants par indépendance des lancers (car $(N_n = k) \cap P_n$ dépend des n premiers lancers et P_{n+1} uniquement du $(n+1)$-ème).
On en déduit que :

$$P((N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = P((N_n = k) \cap P_n) \times P(P_{n+1}) = P((N_n = k) \cap P_n) \times \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} P((N_n = k) \cap P_n).}$$

Q23. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$ (il s'agit bien d'un système complet d'événements car il correspond à tous les différents résultats que l'on peut obtenir aux lancers n et $n+1$), on obtient :

$$\begin{aligned}
P(N_{n+1} = k) &= P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) + P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) \\
&\quad + P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) + P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) \\
&= \frac{1}{2} P((N_n = k) \cap P_n) + \frac{1}{2} P((N_n = k) \cap F_n) + \frac{1}{2} P((N_n = k-1) \cap F_n) + \frac{1}{2} P((N_n = k-1) \cap P_n) \\
&= \frac{1}{2}\big(P((N_n = k) \cap P_n) + P((N_n = k) \cap F_n)\big) + \frac{1}{2}\big(P((N_n = k-1) \cap F_n) + P((N_n = k-1) \cap P_n)\big) \\
&= \frac{1}{2} P(N_n = k) + \frac{1}{2} P(N_n = k-1)
\end{aligned}$$

d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements (P_n, F_n).

$$\boxed{P(N_{n+1}=k)=\frac{1}{2}P(N_n=k)+\frac{1}{2}P(N_n=k-1).}$$

Q24. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1}P(N_{n+1}=k)x^k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}P(N_n=k)x^k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}P(N_n=k-1)x^k\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}P(N_n=k)x^k+\frac{1}{2}\underbrace{P(N_n=n+1)}_{=0}x^{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}P(N_n=k)x^{k+1} \text{ par glissement d'indice}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}P(N_n=k)x^k+\frac{1}{2}\underbrace{P(N_n=0)}_{=0}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}P(N_n=k)x^{k+1}\\
&=\frac{1}{2}G_n(x)+\frac{1}{2}xG_n(x)=\frac{1+x}{2}G_n(x).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R},\ G_{n+1}(x)=\frac{1+x}{2}G_n(x).}$$

Q25. Soit $x\in\mathbb{R}$. D'après la question précédente, la suite $(G_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1+x}{2}$ et de premier terme $G_1(x)=x$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ G_n(x)=x\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}.}$$

Q26. On sait déjà que $\boxed{N_n(\Omega)=[\![1,n]\!]}$.
Par la formule du binôme de Newton, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$G_n(x)=x\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}=x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k}\left(\frac{x}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}x^{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}x^k.$$

Comme par définition, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $G_n(x)=\sum_{k=1}^{n}P(N_n=k)x^k$, on en déduit par unicité des cœfficients d'un polynôme dans la base canonique que :

$$\boxed{\text{pour tout } k\in[\![1,n]\!],\ P(N_n=k)=\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.}$$

Exercice 4 : *Extrait CCINP PC 2020*

Q27. Chaque variable X_k modélise le pas effectué par le pion à l'instant k (elle prend la valeur $+1$ si le déplacement se fait sur la droite et la valeur -1 si le déplacement se fait sur la gauche, de façon équiprobable) donc pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ modélise la position du pion à l'instant n.
Comme $S_0=0$, S_0 modélise aussi la position du pion à l'instant 0.

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } S_n \text{ représente la position du pion à l'instant } n.}$$

Q28. On a $p_0 = P(S_0 = 0) = 1$.
Comme $S_1(\Omega) = X_1(\Omega) = \{-1, 1\}$, on a $(S_1 = 0) = \varnothing$ donc $p_1 = P(S_1 = 0) = 0$.
Enfin, on a $p_2 = P(S_2 = 0) = P(X_1 + X_2 = 0)$.
D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X_1 = k))_{k\in X_1(\Omega)}$ c'est-à-dire $((X_1 = -1), (X_1 = 1))$, on a

$$\begin{aligned}
p_2 = P(X_1 + X_2 = 0) &= P((X_1 = 1) \cap (X_1 + X_2 = 0)) + P((X_1 = -1) \cap (X_1 + X_2 = 0)) \\
&= P((X_1 = 1) \cap (X_2 = -1)) + P((X_2 = -1) \cap (X_1 = 1)) \\
&= P(X_1 = 1)P(X_2 = -1) + P(X_1 = -1)P(X_2 = 1) \quad \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{p_0 = 1,\ p_1 = 0 \text{ et } p_2 = \frac{1}{2}.}$$

Q29. Si n est impair alors pour tout $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{X_k(\omega)}_{\in\{\pm 1\}}$ est un nombre impair car c'est la somme d'un nombre impair de nombres impairs.
En d'autres termes, si on note p le nombre de déplacements vers la gauche réalisés en n étapes, alors le pion a fait aussi $n - p$ déplacements vers la droite, donc sa position à l'instant n est $-p + n - p = n - 2p$ qui est un nombre impair.
Ainsi, la variable aléatoire S_n ne prend comme valeurs que des nombres impairs.
On en déduit que $(S_n = 0) = \varnothing$ (puisque 0 est pair) donc $p_n = P(S_n = 0) = 0$.

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair alors on a } p_n = 0.}$$

Q30. On a $Y_k(\Omega) = \left(\frac{X_k+1}{2}\right)(\Omega) = \left\{\frac{1+1}{2}, \frac{-1+1}{2}\right\} = \{0, 1\}$ donc Y_k suit une loi de Bernoulli.
De plus, $P(Y_k = 1) = P\left(\frac{X_k+1}{2} = 1\right) = P(X_k = 1) = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi :

$$\boxed{Y_k \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}.}$$

Q31. Les variables $Y_1, \ldots, Y_n$ suivent toutes une loi de Bernoulli de même paramètre $\dfrac{1}{2}$ et sont indépendantes (puisque les variables $X_1, \ldots, X_n$ le sont) donc :

$$\boxed{\text{pour tout } n > 0,\ Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{1}{2}.}$$

Par suite, $Z_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$P(Z_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

De plus, on a :

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}X_k + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k + \frac{n}{2} = \frac{S_n + n}{2}$$

donc $\boxed{S_n = 2Z_n - n.}$

Q32. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $2m > 0$, donc d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} p_{2m} &= P(S_{2m} = 0) = P(2Z_{2m} - 2m = 0) = P(Z_{2m} = m) \\ &= \binom{2m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}. \end{aligned}$$

Comme $\binom{0}{0}\frac{1}{4^0} = 1 = p_0$, ce résultat est encore valable pour $m = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } m \in \mathbb{N},\ p_{2m} = \tbinom{2m}{m}\tfrac{1}{4^m}.}$$

Q33. . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|p_n| = P(S_n = 0) \leqslant 1$ donc $p_n = O(1)$.
Ainsi, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} p_n x^n$ est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 1x^n$ (série géométrique) c'est-à-dire $\boxed{R_p \geqslant 1.}$

Q34. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right) &= \frac{1}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right)\right) \\ &= \frac{1}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{2k-1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{m!2^m}\prod_{k=1}^{m}(2k-1) \\ &= \frac{1}{m!2^m}\frac{\prod_{k=1}^{m}(2k-1)\prod_{k=1}^{m}(2k)}{\prod_{k=1}^{m}(2k)} \\ &= \frac{1}{m!2^m}\frac{\prod_{k=1}^{2m} k}{2^m\prod_{k=1}^{m} k} \\ &= \frac{1}{m!2^m}\frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(2m)!}{m!m!}\frac{1}{2^m 2^m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m} = p_{2m}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right).}$$

Q35. D'après le cours, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha - k + 1)x^n.$$

Par suite, pour tout $x \in]-1, 1[$, comme $(-x^2) \in]-1, 1[$, on a

$$(1-x^2)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha - k + 1)(-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha - k + 1)x^{2n}.$$

Par ailleurs, avec les expressions trouvées pour p_n dans la partie précédente, on a pour tout $x \in]-1, 1[$ (on a $R_p \geqslant 1$),

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{p_{2n+1}}_{=0}x^{2n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n}x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}(-\frac{1}{2} - k + 1)x^{2n}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ convient.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-1, 1[,\ f(x) = (1-x^2)^{-1/2}.}$$

Q36. Si $(T = 1)$ se réalise alors $(S_1 = 0)$ se réalise c'est-à-dire $(T = 1) \subset (S_1 = 0)$.
On en déduit que $q_1 = P(T = 1) \leqslant P(S_1 = 0) = p_1 = 0$ d'où $q_1 = 0$.
Comme $(S_1 = 0)$ est l'événement impossible, on a par définition de T : $(T = 2) = (S_2 = 0)$.
Ainsi, $q_2 = P(T = 2) = P(S_2 = 0) = p_2$ donc $q_2 = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{q_1 = 0 \text{ et } q_2 = \frac{1}{2}.}$$

Q37. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$|g_n(x)| = |q_n x^n| = P(T = n)|x|^n \leqslant P(T = n).$$

Ainsi, $P(T = n)$ est un majorant de l'ensemble $\{|g_n(x)|, x \in [-1, 1]\}$ et $\|g_n\|_\infty^{[-1,1]}$ en est le plus petit d'où $0 \leqslant \|g_n\|_\infty^{[-1,1]} \leqslant P(T = n)$.
Or, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(T = n)$ converge (par σ-additivité car les événements $(T = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont deux à deux incompatibles).
Par comparaison par inégalité, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \|g_n\|_\infty^{[-1,1]}$ converge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 0} g_n \text{ converge normalement sur } [-1, 1].}$$

Comme la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$, elle converge simplement sur $[-1, 1]$ donc en particulier, la série $\sum_{n\geqslant 0} g_n(1)$ converge.
Comme $R_q = \sup\{r \geqslant 0,\ \sum_{n\geqslant 0} q_n r^n \text{ converge}\}$, on en déduit que :

$$\boxed{R_q \geqslant 1.}$$

Q38. Comme $R_p \geqslant 1$ et $R_q \geqslant 1$, on a $\min(R_p, R_q) \geqslant 1$ donc par produit de Cauchy, on a pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n \\
&= \left(\sum_{k=0}^{0} p_k q_{0-k}\right) x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n \\
&= p_0 q_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \quad \text{(d'après la relation admise pour tout } n \in \mathbb{N}^*) \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n = -1 + p_0 x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = -1 + f(x).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ f(x)g(x) = -1 + f(x).}$$

Q39. Comme, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ (d'après la question 35.), la relation obtenue à la question précédente devient :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1 - x^2)^{-1/2} g(x) = (1 - x^2)^{-1/2} - 1$$

donc en multipliant de part et d'autre par $\sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{1/2}$, on a bien :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ \ g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}.}$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (\alpha - k + 1) x^n.$$

Avec $\alpha = 1/2$, pour tout $x \in]-1,1[$, comme $(-x^2) \in]-1,1[$, on a :

$$\sqrt{1-x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) (-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n}.}$$

Q40. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n}$.

Par unicité du développement en série entière sur $]-1,1[$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ q_{2n+1} = 0}.$$

Q41. Comme $T(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a :

$$P(T = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n 1^n = 1 - g(1).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[-1,1]$ et la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$ (d'après la question 37) donc par le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions, on en déduit que la fonction $g = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est continue sur $[-1,1]$.

Elle est donc en particulier continue en 1 d'où :

$$g(1) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} (1 - \sqrt{1-x^2}) = 1 \quad \text{(d'après la question 39.).}$$

On a donc :

$$\boxed{\begin{array}{c} P(T = +\infty) = 0 \text{ donc l'événement } (T = +\infty) \text{ est négligeable.} \\ \text{Le pion reviendra à l'origine à un instant donné presque sûrement.} \end{array}}$$