Corrigé PSI MATHS2 2023

Auteur : à partir du corrigé de Rémi Crétois

version du 7 février 2024

I Intégrale de Gauss

Q 1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, par croissances comparées (et composition), $t^2\mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc $\mathrm{e}^{-t^2} = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$. Or, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ aussi par comparaison. Donc l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \text{ est bien convergente}}$.

Q 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ est continue sur $[0, 1]$ par opérations. Donc la fonction $\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)(-x)^2}}{t^2+1} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} \, \mathrm{d}t = f(x)$$

donc $\boxed{f \text{ est paire}}$.
Enfin, $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1} \, \mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^1$, donc $\boxed{f(0) = \dfrac{\pi}{4}}$.

Q 3. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. On pose $h : (x, t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

— Pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2x\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}$;

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $[0, 1]$ (voir question précédente) et $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial t}(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$;

— pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial t}(x, t)\right| \leqslant 2|x|\mathrm{e}^{-x^2}$. Or, la fonction $x \mapsto 2|x|\mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $\pm\infty$, donc elle est bornée (on peut aussi faire l'étude de fonction pour voir qu'elle est majorée par sa valeur en $1/\sqrt{2}$). Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial t}(x, t)\right| \leqslant M$. La fonction $t \mapsto M$ est continue sur $[0, 1]$ et donc intégrable sur $[0, 1]$.

Ainsi, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2x^2} \, \mathrm{d}t}$.

Q 4. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction g est l'unique primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ qui s'annule en 0. En particulier, $\boxed{g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

Q 5. Pour éviter les ennuis, on commence par remarquer que l'égalité est vraie pour $x = 0$ car $f'(0) = 0$ et $g(0) = 0$. Puis, pour $x \neq 0$, on pose $u = xt$:

$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2} \frac{\mathrm{d}u}{x} = -2\mathrm{e}^{-x^2} g(x) = -2g'(x)g(x)$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2g'(x)g(x)}$.

Q 6. D'après les questions précédentes, les fonctions f et $x \mapsto \frac{\pi}{4} - g(x)^2$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et ont la même dérivée. Elle sont donc égales à une constante additive près. Or, $f(0) = \frac{\pi}{4}$ et $g(0) = 0$, donc les deux fonctions coïncident en 0. Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2}$.

Q 7. On applique le théorème de convergence dominée à paramètre continu :

— pour tout $t \in [0, 1]$, $h(x, t) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$;

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$, de même que la fonction nulle ;

— pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$, $|h(x, t)| \leqslant 1$ qui est une fonction indépendante de x et intégrable sur $[0, 1]$.

Donc $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^1 0 \ \mathrm{d}t = 0}$.

Puis, $g(x)^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi}{4}$, donc par continuité de la fonction racine carrée, $|g(x)| \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Comme pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Comme on a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \ \mathrm{d}t$ (intégrale convergente), on en déduit que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

II Formule de Stirling

Q 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $t^n \mathrm{e}^{-t} = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, la fonction $t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ par comparaison. Donc $\boxed{I_n \text{ est bien définie}}$.

Q 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On réalise une intégration par parties : on pose $u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ qui sont deux fonctions de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ de sorte que $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0 \in \mathbb{R}$. Les deux intégrales étant convergentes, on a :

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) \ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t) \ \mathrm{d}t = (n+1) \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \ \mathrm{d}t$$

donc $\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n}$. Comme $I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ \mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} = 1$, on a par récurrence immédiate, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n = n!}$.

Q 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $t = n + \sqrt{n}y$ (affine donc licite). On a $y = -\sqrt{n} + \frac{t}{\sqrt{n}}$, donc

$$I_n = \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(n + \sqrt{n}y\right)^n \mathrm{e}^{-n-\sqrt{n}y} \sqrt{n}\mathrm{d}y = \sqrt{n}n^n\mathrm{e}^{-n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-\sqrt{n}y}\mathrm{d}y$$

D'après la question précédente, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-\sqrt{n}y}\mathrm{d}y}$.

Q 11. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $N = \lfloor y^2 \rfloor + 1$. Alors pour tout $n \geqslant N$, $\sqrt{n} \geqslant \sqrt{y^2} = |y|$, donc $-\sqrt{n} \leqslant y$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$,

$$f_n(y) = \left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{n\ln(1+y/\sqrt{n})-y\sqrt{n}}.$$

Or, lorsque n tend vers $+\infty$, $n\ln(1+y/\sqrt{n}) - y\sqrt{n} = n(y/\sqrt{n} - y^2/2n + o(1/n^2)) - y\sqrt{n} = -y^2/2 + o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -y^2/2$. Ainsi, (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{f_n(y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-y^2/2}}$ par continuité de l'exponentielle.

Q 12. La fonction q est continue sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par opérations. De plus, au voisinage de 0, $q(x) = \dfrac{x-(x-x^2/2+o(x^2))}{x^2} = \dfrac{1}{2}+o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$. Donc $\boxed{q \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } q(0) = \frac{1}{2}}$.

Q 13. Soit $x > -1$. La fonction $u \mapsto 1+ux$ est continue et ne s'annule pas sur $[0,1]$, donc l'intégrale est bien définie. De plus, si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{ux}{1+ux}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{1+ux-1}{1+ux}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{1}{1+ux}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}[\ln(1+ux)]_0^1 \\
&= \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}
\end{aligned}$$

Pour $x = 0$, $q(0) = \dfrac{1}{2} = \displaystyle\int_0^1 u\,\mathrm{d}u$.

Donc $\boxed{\forall x > -1,\ q(x) = \int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u}$.

Q 14. Soit $-1 < x \leqslant y$. Pour tout $u \in]0,1[$, $-1 < -u < ux \leqslant uy$, donc $0 < 1+ux \leqslant 1+uy$ et $\dfrac{u}{1+ux} \geqslant \dfrac{u}{1+uy}$, donc $q(x) \geqslant q(y)$ par croissance de l'intégrale. Ainsi, $\boxed{q \text{ est décroissante sur }]-1,+\infty[}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}_+$.

Si $y = 0$, alors l'inégalité est bien vérifiée.

Si $y > 0$ alors $\dfrac{\ln(f_n(y))}{y^2} = -q\left(\dfrac{y}{\sqrt{n}}\right) \leqslant -q(y)$ car la fonction $-q$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\dfrac{y}{\sqrt{n}} \leqslant y$.

Donc $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}_+,\ f_n(y) \leqslant \mathrm{e}^{-y^2q(y)} = \mathrm{e}^{-y}(1+y)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}_-^*$. Alors, si $y \leqslant -\sqrt{n}$, $f_n(y) = 0 \leqslant \mathrm{e}^{-y^2/2}$ et si $y > -\sqrt{n}$, alors $f_n(y) > 0$ et $\dfrac{\ln(f_n(y))}{y^2} = -q\left(\dfrac{y}{\sqrt{n}}\right) \leqslant -q(0)$ car $-q$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$. Donc $\ln(f_n(y)) \leqslant -\dfrac{y^2}{2}$ et $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}_-^*,\ f_n(y) \leqslant \mathrm{e}^{-y^2/2}}$.

Q 15. Appliquons le théorème de convergence dominée :

— pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ (questions 8 et 10) ;

— (f_n) converge simplement vers $f : y \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ (question 1 et parité) ;

— pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant f_n(y) \leqslant g(y)$ où $g : y \mapsto \begin{cases} (1+y)\mathrm{e}^{-y} & \text{si } y \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-y^2/2} & \text{si } y < 0 \end{cases}$ qui est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrable au voisinage de $+\infty$ (question 8) et de $-\infty$ (question 1).

Donc $\displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\mathrm{d}y \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y$ par parité.

En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{y}{\sqrt{2}}$, cette limite vaut donc $2\sqrt{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$ d'après la question 7.

D'après la question 10, on a donc $\dfrac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{2\pi}$ et $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

Q 16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
w_n = v_{n+1} - v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)}\sqrt{n+1}\,n!}{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}(n+1)!}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)^n\mathrm{e}^{-1}\sqrt{n+1}}{n^n\sqrt{n}}\right) \\
&= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&\underset{n \to +\infty}{=} -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&\underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Donc $w_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$. En particulier, (w_n) est positive à partir d'un certain rang et comme la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge par critère de Riemann, $\boxed{\text{la série } \sum w_n \text{ converge aussi}}$.

Q 17. Comme $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n$, $\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$. Par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$, donc $1 - \varepsilon \leqslant \dfrac{a_n}{b_n} \leqslant 1 + \varepsilon$. Ainsi, comme (b_n) est une suite de réels strictement positifs, $\boxed{\forall n \geqslant n_0,\ (1-\varepsilon)b_n \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)b_n}$.

Q 18. La série $\sum(1+\varepsilon)b_n$ converge donc la série $\sum a_n$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

De plus, pour $n \geqslant n_0$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(1-\varepsilon)b_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}(1+\varepsilon)b_k$, donc $\forall n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{\sum_{k=n}^{+\infty} a_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} b_k} - 1\right| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, $\dfrac{\sum_{k=n}^{+\infty} a_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} b_k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k}$.

Q 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[n, n+1]$, donc pour tout $t \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant \dfrac{1}{t^2} \geqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Par croissance de l'intégrale, $\boxed{\dfrac{1}{(n+1)^2} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^2}}$.

Q 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant l'encadrement précédent, $R_{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2} = \frac{1}{n}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathbb{R}_n$, l'intégrale étant convergente car $2 > 1$.

Donc pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n} \leqslant R_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$, et par encadrement, $\boxed{R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}}$.

Q 21. Comme $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$, que la suite $\left(\dfrac{1}{12n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive et $\sum \dfrac{1}{12n^2}$ converge et (w_n) est positive à partir d'un certain rang au moins, on a d'après la question 18, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12} R_n$.

D'après la question 20, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n}}$.

Q 22. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} w_k = \lim(v_k) - v_n$. Or $v_k = \ln(u_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} -\ln(\sqrt{2\pi})$ d'après la question 15. D'après la question 21, $-\ln(\sqrt{2\pi}) - v_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $v_n \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(\sqrt{2\pi}) - \dfrac{1}{12n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Enfin, $\dfrac{1}{u_n} = \mathrm{e}^{-v_n} = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{2\pi}\left(1 + \dfrac{1}{12n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$. En posant $q_n = n\left(\dfrac{1}{u_n\sqrt{2\pi}} - 1 - \dfrac{1}{12n}\right)$, on obtient donc $\boxed{q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } n! = \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\left(1 + \dfrac{1}{12n} + \dfrac{q_n}{n}\right)}$.

III Étude de deux séries entières et application à une marche aléatoire

Q 23. Notons $Z_1 = \dfrac{1}{2}(X_1 + 1)$. Alors $Z_1(\Omega) = \{0, 1\}$, donc $\boxed{Z \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } P(Z_1 = 1) = P(X_1 = 1) = p}$.

Q 24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, posons $Z_k = \dfrac{1}{2}(X_k + 1)$ alors $Z_1, \dots, Z_n$ suivent des lois de Bernoulli de paramètre p et sont encore indépendantes. Donc $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n Z_k$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Or, $B_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^n X_k + \frac{n}{2} = \frac{1}{2}S_n + \frac{n}{2}$ donc $\boxed{\dfrac{1}{2}S_n + \dfrac{n}{2} \sim B(n, p).}$

Q 25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$a_n = P(S_{2n} = 0) = P\left(\frac{1}{2}S_{2n} + n = n\right) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^{2n-n}$$

puisque d'après la question précédente appliquée avec $2n$, $B_{2n} = \dfrac{1}{2}S_{2n} + n$ suit la loi binômiale de paramètres $2n$ et p.

On a donc bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \binom{2n}{n} p^n q^n}$.

Q 26. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ert $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{2n+2}}{a_n x^{2n}} \right| = \frac{(2n+2)!(n!)^2 pq}{(2n)!(n+1)!^2} x^2 = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} pqx^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4pqx^2$$

Donc d'après le critère de d'Alembert, la série numérique $\sum a_n x^{2n}$ converge pour tout $x \in \left] -\frac{1}{2\sqrt{pq}}, \frac{1}{2\sqrt{pq}} \right[$ et diverge pour $|x| > \frac{1}{2\sqrt{pq}}$ et $\boxed{\text{le rayon de convergence est } R = \frac{1}{2\sqrt{pq}}}$.

Q 27. Lorsque $\frac{1}{2\sqrt{pq}} > 1$, c'est-à-dire lorsque $4pq = 4p(1-p) < 1$ ou encore $4p^2 - 4p + 1 = (2p-1)^2 > 0$, donc lorsque $p \neq \frac{1}{2}$, on a $R > 1$, donc $A(1)$ a une valeur finie ;

Pour $p = \frac{1}{2}$, on utilise Stirling : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{2\pi n \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente donc la série $\sum a_n$ diverge par comparaison des séries à termes positifs.

Ainsi, $\boxed{A(1) \text{ converge ssi } p \neq \frac{1}{2}}$.

Q 28. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} x^n$ (développement usuel).

Donc pour tout $x \in]-R, R[$, $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} (4pqx^2)^n$ et $\boxed{A(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}}$.

Q 29. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons pour $k \in \mathbb{N}^*$, $R_k = \bigcap_{i=1}^{2k-1} (S_i \neq 0) \cap (S_{2k} = 0)$ et $R_0 = \bigcap_{i=1}^{+\infty} (S_i \neq 0)$. La famille $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. On applique la formule des probabilités totales : $a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} P((S_{2n} = 0) \cap R_k)$. Or, lorsque $k = 0$ ou $k > n$, on a $P((S_{2n} = 0) \cap R_k) = 0$.

Donc $a_n = \sum_{k=1}^{n} P((S_{2n} = 0) \cap R_k)$. Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(S_{2n} = 0) \cap R_k = R_k \cap (S_{2n} - S_{2k} = 0) = R_k \cap (\sum_{i=2k+1}^{2n} X_i = 0)$. D'après le lemme des coalitions, R_k et $(\sum_{i=2k+1}^{2n} X_i = 0)$ sont indépendants, donc $P(R_k \cap (\sum_{i=2k+1}^{2n} X_i = 0)) = P(R_k) P(\sum_{i=2k+1}^{2n} X_i = 0) = b_k P(\sum_{i=1}^{2n-2k} X_i = 0)$ en utilisant la propriété admise dans l'énoncé.

Ainsi, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k a_{n-k}$. Comme $b_0 = 0$, on trouve donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}}$.

NB : On pouvait ausi écrire par la formule des probabilités totales :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} P((S_{2n} = 0) \cap R_k) = \sum_{k=1}^{n} P(R_k) \times P_{R_k}(S_{2n} = 0)$$

et expliquer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P_{R_k}(S_{2n} = 0) = a_{n-k}$ car l'événement R_k étant réalisé, le pion se trouve à l'origine à l'issue du lancer numéro $2k$ et il se trouvera alors de nouveau à l'origine à l'issue du lancer numéro $2n$ c'est-à-dire $2(n-k)$ lancers plus tard avec une probabilité égale à a_{n-k}. Cette approche est cependant moins rigoureuse.

Q 30. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ donc le rayon de convergence de B est supérieur ou égal à R. Donc pour tout $x \in]-R, R[$, par produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes, on a :

$$A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^{2k} a_{n-k} x^{2(n-k)}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}\right) x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n}$$

car $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} b_k a_{0-k} = 0$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in]-R, R[,\ A(x)B(x) = A(x) - 1}$.

Q 31. Pour tout $x \in]-R, R[$, $B(x) = \dfrac{A(x)-1}{A(x)} = 1 - \dfrac{1}{A(x)}$ car A ne s'annule pas.

Enfin, d'après la question 28, $\boxed{\text{pour tout } x \in]-R, R[,\ B(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2}}$.

Q 32. La fonction $p \mapsto \sqrt{1-4p(1-p)}$ est définie pour $1 - 4p(1-p) = (2p-1)^2 \geqslant 0$ c'est-à-dire $\boxed{\text{pour tout réel } p}$.

On remarque que $B(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(R_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k\right)$ car c'est une union d'événements deux à deux incompatibles.

Donc $\boxed{\text{la série } \sum b_n \text{ converge pour toute valeur de } p \in [0,1]}$.

Q 33. L'événement $R_0 = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{+\infty}(S_i \neq 0)$ = « le point ne revient jamais en 0 » a pour complémentaire $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k$ qui est une union incompatible. Donc, $P(R_0) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(R_k) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Lorsque $p \neq \dfrac{1}{2}$, $1 \in]-R, R[$, donc $P(R_0) = 1 - B(1) = \sqrt{1-4pq} = \sqrt{(2p-1)^2} = |2p-1|$, d'où $\boxed{P(R_0) = |p-q|}$.

Prenons $p = \dfrac{1}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : x \mapsto b_n x^{2n}$ qui est une fonction continue sur $[0,1]$, positive et majorée par b_n. Comme $\sum b_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \lim_{x\to 1^-} 1 - \sqrt{1-x^2} = 1$. D'où $\boxed{P(R_0) = 1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 0 = |p-q|}$.

IV Loi de l'arcsinus

Q 34. Remarquons que le nombre cherché est :

$$N_{n,x} = \operatorname{card}\left\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n : \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k = x\right\}.$$

Si $x \in [\![-n, n]\!]$, pour tout $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, en notant $m = \operatorname{card}\{i \in [\![1,n]\!] : \varepsilon_i = -1\}$, on a $n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = n - (n-m-m) = 2m$ qui est pair. Donc $\boxed{\text{si } n-x \text{ est impair, } N_{n,x} = 0}$.

De plus, pour tout $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \in [\![-n, n]\!]$, donc $\boxed{\text{si } x \notin [\![-n, n]\!],\ N_{n,x} = 0}$.

Enfin, supposons que $x \in [\![-n, n]\!]$ et que $n-x$ est pair. Pour choisir un n-uplet d'éléments de $\{-1, 1\}$ dont la somme fait $x \in \mathbb{N}^*$, il faut et il suffit de choisir $x + \dfrac{n-x}{2} = a$ coordonnées qui valent 1 et toutes les autres (il y en a $\dfrac{n-x}{2}$) valent -1. Donc $\boxed{N_{n,x} = \dbinom{n}{a}}$.

Q 35. Comme dit dans l'énoncé, tous les chemins sont équiprobables de probabilité $\dfrac{1}{2^n}$, on a compté les chemins qui mènent à $(S_n = x)$ donc
$\boxed{P(S_n = x) = \dbinom{n}{a}\dfrac{1}{2^n} \text{ si } x \in [\![-n, n]\!] \text{ et } n-x \text{ est pair et } P(S_n = x) = 0 \text{ sinon}}$.

Q 36. On réutilise la question 24 et la variable B_n qui suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$ et telle que $S_n = 2B_n - n$. En particulier, S_n prend des valeurs $x \in [\![-n, n]\!]$ telles que $n+x$ est pair (ou de façon équivalente $n-x$ est pair). Pour un tel x, $\boxed{P(S_n = x) = P(B_n = a) = \dbinom{n}{a}\dfrac{1}{2^n}, \text{ où } a = \dfrac{n+x}{2}}$.

Q 37. On a une bijection entre les chemins du premier et deuxième type : à chaque chemin reliant $(0, x)$ à (n, y) passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0, on associe le chemin obtenu à partir de celui-ci en prenant la réflexion par rapport à l'axe des abscisses de la portion joignant $(0, x)$ au premier point d'ordonnée 0.
Réciproquement, un chemin de $(0, -x)$ à (n, y) passe forcément par au moins un point d'ordonnée 0 (car $x, y \in \mathbb{N}^*$) et on réalise la même réflexion.

Q 38. En effectuant la translation de vecteur $(-1, -1)$, le nombre total de chemins joignant $(1, 1)$ à (n, x) est égal à $N_{n-1,x-1}$.
D'autre part, en effectuant la translation de vecteur $(-1, 0)$, le nombre de chemins joignant $(1, 1)$ à (n, x) en passant au moins une fois par l'axe des abscisses est égal au nombre de chemins de $(0, 1)$ à $(n-1, x)$ passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0 et donc d'après la question précédente, il est égal au nombre de chemins quelconques de $(-1, 0)$ à $(n-1, x)$ qui est égal à $N_{n-1,x+1}$ en faisant la translation de vecteur $(0, 1)$.
Donc le nombre de chemins reliant $(1, 1)$ à (n, x) sans jamais rencontre l'axe des abscisses vaut $\boxed{N_{n-1,x-1} - N_{n-1,x+1}}$.

Q 39. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'événement $(S_1 > 0) \cap \cdots \cap (S_{2n-1} > 0) \cap (S_{2n} = 2k)$ correspond aux chemins passant par $(0, 0)$, $(1, 1)$ puis joignant $(2n, 2k)$ sans jamais rencontrer l'axe des abscisses. Il y en a $N_{2n-1,2k-1} - N_{2n-1,2k+1}$ qui sont tous equiprobables de probabilité $\dfrac{1}{2^{2n}}$, donc

$$\begin{aligned} P\left((S_1 > 0) \cap \cdots \cap (S_{2n-1} > 0) \cap (S_{2n} = 2k)\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}N_{2n-1,2k-1} - \frac{1}{2^{2n-1}}N_{2n-1,2k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(P(S_{2n-1} = 2k-1) - P(S_{2n-1} = 2k+1)\right) \end{aligned}$$

d'après la question 35.

Q 40. Comme S_{2n} ne prend que des valeurs paires, $(S_{2n} > 0) = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}(S_{2n} = 2k)$, les événements étant impossibles pour $k > n$. Donc par σ-additivité (les événements étant deux à deux incompatibles), on obtient :

$$\begin{aligned}
P\left((S_1>0)\cap\cdots\cap(S_{2n-1}>0)\cap(S_{2n}>0)\right) &= P\left((S_1>0)\cap\cdots\cap(S_{2n-1}>0)\cap\bigcup_{k=1}^{+\infty}(S_{2n}=2k)\right)\\
&=\sum_{k=1}^{+\infty}P\left((S_1>0)\cap\cdots\cap(S_{2n-1}>0)\cap(S_{2n}=2k)\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}P(S_{2n-1}=2k-1)-P(S_{2n-1}=2k+1)
\end{aligned}$$

En téléscopant et en utilisant que pour $k>n$, $P(S_{2n}=2k)=0$, on trouve donc

$$P\left((S_1>0)\cap\cdots\cap(S_{2n-1}>0)\cap(S_{2n}>0)\right)=\frac{1}{2}P(S_{2n-1}=1).$$

Or, par la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $((X_{2n}=1),$ $(X_{2n}=-1))$, on a :

$$\begin{aligned}
P(S_{2n}=0) &= P((S_{2n}=0)\cap(X_{2n}=1))+P((S_{2n}=0)\cap(X_{2n}=-1))\\
&= P((S_{2n-1}=-1)\cap(X_{2n}=1))+P((S_{2n-1}=1)\cap(X_{2n}=-1))\\
&= P(S_{2n-1}=-1)\times P(X_{2n}=1)+P(S_{2n-1}=1)\times P(X_{2n}=-1)\quad\text{par indépendance}\\
&= \frac{1}{2}(P(S_{2n-1}=-1)+P(S_{2n-1}=1)).
\end{aligned}$$

Or, par symétrie, on a $P(S_{2n-1}=-1)=P(S_{2n-1}=1)$ d'où $P(S_{2n}=0)=P(S_{2n-1}=1)$.
Ainsi :

$$\boxed{P\left((S_1>0)\cap\cdots\cap(S_{2n-1}>0)\cap(S_{2n}>0)\right)=\frac{1}{2}P(S_{2n}=0)}$$

Un trajet partant de $(0,0)$ et ne coupant jamais l'axe des abscisses est soit un trajet contenu dans le demi-plan d'équation $y>0$, soit un trajet contenu dans le demi-plan d'équation $y<0$.
Ainsi, par additivité :

$$\begin{aligned}
P\left((S_1\neq 0)\cap\cdots\cap(S_{2n}\neq 0)\right) &= P\left((S_1>0)\cap\cdots\cap(S_{2n}>0)\right)+P\left((S_1<0)\cap\cdots\cap(S_{2n}<0)\right)\\
&=2P\left((S_1>0)\cap\cdots\cap(S_{2n-1}>0)\cap(S_{2n}>0)\right)
\end{aligned}$$

par symétrie. D'où :

$$\boxed{P\left((S_1\neq 0)\cap\cdots\cap(S_{2n-1}\neq 0)\cap(S_{2n}\neq 0)\right)=P(S_{2n}=0)}$$

Q 41. Soit $k\in[\![0,n]\!]$. Par définition,

$$\begin{aligned}
P(T_n=2k) &= P((S_{2k}=0)\cap(S_{2k+1}\neq 0)\cap\cdots\cap(S_{2n}\neq 0))\\
&= P((S_{2k}=0)\cap(S_{2k+1}-S_{2k}\neq 0)\cap\cdots\cap(S_{2n}-S_{2k}\neq 0))
\end{aligned}$$

Or pour tout $j\in[\![1,2n-2k]\!]$, $S_{2k+j}-S_{2k}=\displaystyle\sum_{i=2k+1}^{2k+j}X_i$, donc $(S_{2k+1}-S_{2k}\neq 0)\cap\cdots\cap(S_{2n}-S_{2k}\neq 0)$ et $(S_{2k}=0)$ sont indépendants. De plus, d'après l'énoncé (interprété largement) $\displaystyle\sum_{i=2k+1}^{2k+j}X_i$ et S_j ont la même loi, « donc », $P((S_{2k+1}\neq 0)\cap\cdots\cap(S_{2n}\neq 0))=P((S_1\neq 0)\cap\cdots\cap(S_{2n-2k}\neq 0))$. Ainsi,

$$\boxed{P(T_n=2k)=P(S_{2k}=0)\times P((S_1\neq 0)\cap\cdots\cap(S_{2n-2k}\neq 0))}$$

Q 42. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. La question 35 donne $P(S_{2k}=0) = \binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}$ et $P(S_{2n-2k}=0) = \binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{2^{2n-2k}}$.
La question 40 donne alors :

$$\boxed{P(T_n = 2k) = \binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{2^{2n-2k}} = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n}}$$

Q 43. On remarque que f est continue sur $[0,1]$, donc d'après le théorème sur les sommes de Riemann : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$.
Or pour tout $k \leqslant \lfloor n\alpha \rfloor \leqslant n\alpha$, on a $\frac{k}{n} \leqslant \alpha$, donc $f(k/n) = f(\alpha)$. De même pour $k \geqslant \lfloor n\beta \rfloor + 1 \geqslant n\beta$, on a $\frac{k}{n} \geqslant \beta$ et $f(k/n) = f(\beta)$.
Ainsi, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\lfloor n\alpha\rfloor} f(k/n) + \frac{1}{n}\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor} f(k/n) + \frac{1}{n}\sum_{k=\lfloor n\beta\rfloor+1}^{n} f(k/n) = \frac{\lfloor n\alpha\rfloor}{n}f(\alpha) + \frac{n-\lfloor n\beta\rfloor}{n}f(\beta) + \sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\lfloor n\alpha\rfloor}{n} \leqslant \alpha$, donc $\frac{\lfloor n\alpha\rfloor}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$ et de même $\frac{\lfloor n\beta\rfloor}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta$. D'où :

$$\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \alpha f(\alpha) - (1-\beta)f(\beta).$$

Comme f est constante sur $[0,\alpha]$ et sur $[\beta,1]$, $\int_0^\alpha f(t)\ \mathrm{d}t = \alpha f(\alpha)$ et $\int_\beta^1 f(t)\ \mathrm{d}t = (1-\beta)f(\beta)$, et

$$\boxed{\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t.}$$

Q 44. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\varepsilon_n = 8n\left(1 - \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}\binom{2n}{n}\right)$ et vérifions que $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. En utilisant le raffinement de la formule de Stirling :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= 8n\left(1 - \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}\frac{2\sqrt{n\pi}\frac{(2n)^{2n}}{\mathrm{e}^{2n}}\left(1+\frac{1}{24n}+\frac{q_{2n}}{2n}\right)}{2\pi n\frac{n^{2n}}{\mathrm{e}^{2n}}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{q_n}{n}\right)^2}\right)\\
&= 8n\left(1 - \frac{1+\frac{1}{24n}+\frac{q_{2n}}{2n}}{\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{q_n}{n}\right)^2}\right)\\
&= 8n\left(1 - \left(1+\frac{1}{24n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-2\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= 8n\left(1 - \left(1-\frac{1}{6n}+\frac{1}{24n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= 8n\left(\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= 1+o(1).
\end{aligned}$$

On a donc bien $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Q 45. On utilise la question précédente :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4^n}\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} &= \frac{1}{4^n}\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\frac{4^k}{\sqrt{k\pi}}\left(1-\frac{\varepsilon_k}{8k}\right)\frac{4^{n-k}}{\sqrt{(n-k)\pi}}\left(1-\frac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)}\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}\left(1-\frac{\varepsilon_k}{8k}\right)\left(1-\frac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)}\right)\end{aligned}$$

Soit $1>\varepsilon>0$. Comme $\frac{\varepsilon_n}{8n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, prenons $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$, $0<1-\varepsilon\leqslant 1-\frac{\varepsilon_n}{8n}\leqslant 1+\varepsilon$.
Comme $\lfloor n\alpha\rfloor\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ et $n-\lfloor n\beta\rfloor\geqslant n(1-\beta)-1\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, soit $N'\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N'$, $\min(\lfloor n\alpha\rfloor, n-\lfloor n\beta\rfloor)\geqslant N$. Alors pour tout $n\geqslant N'$, et tout $k\in[\![\lfloor n\alpha\rfloor+1,\lfloor n\beta\rfloor]\!]$,

$$(1-\varepsilon)^2\leqslant\left(1-\frac{\varepsilon_k}{8k}\right)\left(1-\frac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)}\right)\leqslant(1+\varepsilon)^2$$

et ainsi,

$$\left|\left(1-\frac{\varepsilon_k}{8k}\right)\left(1-\frac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)}\right)-1\right|\leqslant\varepsilon(2+\varepsilon)\leqslant 3\varepsilon$$

d'où

$$\left|\frac{1}{4^n}\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}\right|\leqslant 3\varepsilon\frac{1}{\pi}\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}.$$

La suite $\left(\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}\right)$ converge donc est bornée. Il existe donc $M\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n\geqslant N'$,

$$\left|\frac{1}{4^n}\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}\right|\leqslant M\varepsilon$$

Ainsi, $\boxed{\frac{1}{4^n}\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}$.

Q 46. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $m_n=\begin{cases}\lfloor n\alpha\rfloor+1 & \text{si } n\alpha+\frac{1}{2}\leqslant\lfloor n\alpha\rfloor+1\\ \lfloor n\alpha\rfloor+2 & \text{sinon.}\end{cases}$.
On vérifie alors que $2k\in[\![\lfloor 2n\alpha\rfloor+1,\lfloor 2n\beta\rfloor]\!]\iff k\in[\![m_n,\lfloor n\beta\rfloor]\!]$.
Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{T_n}{2n}\in[\alpha,\beta]\right)=(T_n\in[2n\alpha,2n\beta])=(T_n\in[\![\lfloor 2n\alpha\rfloor+1,\lfloor 2n\beta\rfloor]\!])=\bigcup_{k=m_n}^{\lfloor n\beta\rfloor}(T_n=2k).$$

D'après la question 42,

$$P\left(\frac{T_n}{2n}\in[\alpha,\beta]\right)=\sum_{k=m_n}^{\lfloor n\beta\rfloor}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n}$$

et d'après les questions 45 et 43, et en utilisant le fait que $P(T_n = m_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on trouve :

$$P\left(\frac{T_n}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$$

Il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale en posant $t = u^2$:

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} \frac{2}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = 2[\arcsin(u)]_\alpha^\beta$$

Ainsi,

$$\boxed{P\left(\frac{T_n}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\left(\arcsin(\sqrt{\beta}) - \arcsin(\sqrt{\alpha})\right).}$$

• • • FIN • • •