

## ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

*Corrigé des exercices - Révisions PCSI - Pour le vendredi 16 février*

*Exercice 1 : Produits scalaires et normes euclidiennes*

1.  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et pour tout  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ ,  $\varphi(A, B) = \text{tr}(A^T B)$ .

En notant  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , on a :

$$\varphi(A, B) = \sum_{j=1}^n [A^T B]_{j,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n [A^T]_{j,i} b_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j} b_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}.$$

◇  $\varphi$  définit bien une application de  $E \times E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

◇ Soit  $(A, B, C) \in E^3$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On a par linéarité de la trace ( $*$ ) :

$$\varphi(A, \lambda B + C) = \text{tr}(A^T(\lambda B + C)) = \text{tr}(\lambda A^T B + A^T C) \stackrel{(*)}{=} \lambda \text{tr}(A^T B) + \text{tr}(A^T C) = \lambda \varphi(A, B) + \varphi(A, C).$$

◇ Soit  $(A, B) \in E^2$ .

Il est clair que  $\varphi(B, A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i,j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j} = \varphi(A, B)$ .

◇ Soit  $A \in E$ . On a  $\varphi(A, A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j})^2$ .

Il s'agit d'une somme de termes positifs donc on a  $\varphi(A, A) \geq 0$ .

◇ Soit  $A \in E$ . On suppose que  $\varphi(A, A) = 0$  c'est-à-dire  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j})^2 = 0$ .

Il s'agit d'une somme de termes positifs. Or, une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls.

On en déduit que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j}^2 = 0$  d'où  $a_{i,j} = 0$ .

Ainsi,  $A = 0_n$ .

Les points précédents prouvent que  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $E$ .

Ainsi :

$\varphi$  définit un produit scalaire sur  $E$  et la norme euclidienne associée est donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j})^2}$$

2. Soit  $a \in \mathbb{R}$ .  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et pour tout  $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ ,  $\psi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a)$ .

◇  $\psi$  définit bien une application de  $E \times E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

◇ Soit  $(P, Q, R) \in E^3$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On a par linéarité de la dérivation puis de la somme :

$$\begin{aligned} \psi(P, \lambda Q + R) &= \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a) (\lambda Q + R)^{(k)}(a) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a) (\lambda Q^{(k)}(a) + R^{(k)}(a)) \\ &= \sum_{k=0}^n (\lambda P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a) + P^{(k)}(a) R^{(k)}(a)) = \lambda \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a) R^{(k)}(a) \\ &= \lambda \psi(P, Q) + \psi(P, R). \end{aligned}$$

◇ Soit  $(P, Q) \in E^2$ .

Il est clair que  $\psi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a) = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}(a)P^{(k)}(a) = \psi(Q, P)$ .

◇ Soit  $P \in E$ . On a  $\psi(P, P) = \sum_{k=0}^n (P^{(k)}(a))^2$ .

Il s'agit d'une somme de termes positifs donc on a  $\psi(P, P) \geq 0$ .

◇ Soit  $P \in E$ . On suppose que  $\psi(P, P) = 0$  c'est-à-dire  $\sum_{k=0}^n (P^{(k)}(a))^2 = 0$ .

Il s'agit d'une somme de termes positifs. Or, une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls.

On en déduit que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $(P^{(k)}(a))^2 = 0$  d'où  $P^{(k)}(a) = 0$ .

Ainsi,  $a$  est une racine de  $P$  de multiplicité supérieure ou égale à  $n + 1$ . Comme  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ , on en déduit que c'est le polynôme nul :  $P = 0_E$ .

Les points précédents prouvent que  $\psi$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $E$ .

Ainsi :

$\psi$  définit un produit scalaire sur  $E$  et la norme euclidienne associée est donnée par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \|P\| = \sqrt{\sum_{k=0}^n (P^{(k)}(a))^2}.$$

3.  $E = \mathbb{R}[X]$  et pour tout  $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ ,  $\langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ .

◇  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  définit bien une application de  $E \times E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  car pour tout  $(P, Q) \in E^2$ , la fonction  $t \mapsto P(t)Q(t)$  est continue par morceaux sur le segment  $[0, 1]$  donc  $\int_0^1 P(t)Q(t)dt$  est une intégrale « ordinaire ».

◇ Soit  $(P, Q, R) \in E^3$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Par linéarité de l'intégrale « ordinaire », on a :

$$\begin{aligned} \langle \lambda P + Q, R \rangle &= \int_0^1 (\lambda P + Q)(t)R(t)dt = \int_0^1 (\lambda P(t)R(t) + Q(t)R(t))dt \\ &= \lambda \int_0^1 P(t)R(t)dt + \int_0^1 Q(t)R(t)dt = \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle. \end{aligned}$$

◇ Soit  $(P, Q) \in E^2$ .

Il est clair que  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt = \int_0^1 Q(t)P(t)dt = \langle Q, P \rangle$ .

◇ Soit  $P \in E$ . On a  $\langle P, P \rangle = \int_0^1 (P(t))^2 dt$ .

Comme pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $(P(t))^2 \geq 0$ , par positivité de l'intégrale ( $0 \leq 1$ ), on a  $\langle P, P \rangle \geq 0$ .

◇ Soit  $P \in E$ . On suppose que  $\langle P, P \rangle = 0$  c'est-à-dire  $\int_0^1 (P(t))^2 dt = 0$ .

Comme la fonction  $t \mapsto (P(t))^2$  est positive et **continue** sur  $[0, 1]$  (avec  $0 \neq 1$ ), on en déduit par le cas de nullité de l'intégrale que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $(P(t))^2 = 0$  donc  $P(t) = 0$ .

Ainsi,  $P$  est un polynôme qui admet une infinité de racines (tous les réels de l'intervalle  $[0, 1]$ ) donc  $P$  est le polynôme nul :  $P = 0_E$ .

Les points précédents prouvent que  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $E$ .

Ainsi :

$\langle \cdot | \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $E$  et la norme euclidienne associée est donnée par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \|P\| = \sqrt{\int_0^1 (P(t))^2 dt}.$$

*Exercice 2 : Inégalité de Cauchy-Schwarz*

1. *Énoncé du théorème :*

- ▶ Pour tout  $(u, v) \in E^2$ , on a  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ .
- ▶ De plus, l'égalité  $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$  est vérifiée si et seulement si  $u$  et  $v$  sont colinéaires.

*Preuve du théorème :* Soit  $(u, v) \in E^2$ .

*1er cas :* On suppose que  $u = 0_E$ .

On a alors  $|\langle u, v \rangle| = |0| = 0$  et  $\|u\| \cdot \|v\| = 0 \cdot \|v\| = 0$ .

On a donc bien  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ .

Remarquons qu'il y a même égalité et dans ce cas,  $u$  et  $v$  sont colinéaires.

*2ème cas :* On suppose que  $u \neq 0_E$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\|xu + v\|^2 = \|xu\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle xu, v \rangle = (|x| \cdot \|u\|)^2 + \|v\|^2 + 2x\langle u, v \rangle = \|u\|^2 x^2 + 2\langle u, v \rangle x + \|v\|^2.$$

Comme  $u \neq 0$ , on a  $\|u\|^2 \neq 0$ .

Ainsi, la fonction  $\varphi : x \mapsto \|u\|^2 x^2 + 2\langle u, v \rangle x + \|v\|^2$  est un trinôme du second degré.

Notons  $\Delta$  son discriminant. On a :

$$\Delta = (2\langle u, v \rangle)^2 - 4\|u\|^2 \cdot \|v\|^2 = 4((\langle u, v \rangle)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2).$$

Comme pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = \|xu + v\|^2 \geq 0$ , on a nécessairement  $\Delta \leq 0$  (car si on avait  $\Delta > 0$ , la fonction  $\varphi$  prendrait des valeurs strictement négatives entre ses deux racines).

On en déduit  $(\langle u, v \rangle)^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$  et donc par croissance de la fonction racine carrée sur  $\mathbb{R}_+$  :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Étudions le cas d'égalité. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} |\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\| &\iff \Delta = 0 \\ &\iff \underset{\text{car } \Delta \leq 0}{\exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \varphi(x_0) = 0} \\ &\iff \exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \|x_0 u + v\|^2 = 0 \\ &\iff \exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } x_0 u + v = 0_E \\ &\iff \underset{\alpha = -x_0}{\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } v = \alpha u} \\ &\iff \underset{u \neq 0_E}{u \text{ et } v \text{ sont colinéaires}} \end{aligned}$$

2. *Application 1 :* Notons  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

Comme  $X(\Omega)$  est un sous-ensemble fini de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  et  $X^2$  sont d'espérance finie et on a  $E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k)$

et  $E(X^2) = \sum_{k=1}^n x_k^2 P(X = x_k)$  par le théorème du transfert.

On se place dans  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs  $a = (x_1 \sqrt{P(X = x_1)}, \dots, x_n \sqrt{P(X = x_n)})$

et  $b = (\sqrt{P(X = x_1)}, \dots, \sqrt{P(X = x_n)})$ , on a :

$$\begin{aligned} |\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\| &\iff \left| \sum_{k=1}^n x_k \sqrt{P(X = x_k)} \sqrt{P(X = x_k)} \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k \sqrt{P(X = x_k)})^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n (\sqrt{P(X = x_k)})^2} \\ &\iff \left| \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k) \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2 P(X = x_k)} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n P(X = x_k)}. \end{aligned}$$

Or, comme  $([X = x_k])_{1 \leq k \leq n}$  est un système complet d'événements, on a  $\sum_{k=1}^n P(X = x_k) = 1$ .

On en déduit que :

$$\boxed{|E(X)| \leq \sqrt{E(X^2)}}.$$

*NB* : On pouvait aussi utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz vue dans le cours sur les variables aléatoires avec les variables  $X$  et  $Y = 1$  (car  $X^2$  et  $Y^2$  sont d'espérance finie).

On obtient  $(E(X))^2 \leq E(X^2)$  d'où le résultat par croissance de la fonction racine carrée sur  $\mathbb{R}_+$ .

*Autre méthode en utilisant la variance :*

Comme  $X^2$  est d'espérance finie,  $X$  admet une variance et on a par positivité de l'espérance,

$$V(X) = E((X - E(X))^2) \geq 0.$$

Par la formule d'Huygens, on en déduit :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \geq 0 \text{ d'où } E(X^2) \geq (E(X))^2.$$

On conclut comme précédemment.

3. *Application 2* : Soit  $x \in [0, 1]$ .

Comme  $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$  et  $f(0) = 0$ , on a  $f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt$ .

On se place dans  $\mathcal{C}([0, x], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire usuel  $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^x \varphi(t)\psi(t) dt$ .

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs  $\varphi : t \mapsto 1$  et  $\psi : t \mapsto f'(t)$ , on a :

$$\begin{aligned} |\langle \varphi, \psi \rangle| &\leq \|\varphi\| \cdot \|\psi\| \Leftrightarrow \left| \int_0^x 1 \times f'(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_0^x 1^2 dt} \sqrt{\int_0^x (f'(t))^2 dt} \\ &\Leftrightarrow |f(x)| \leq \sqrt{x} \sqrt{\int_0^x (f'(t))^2 dt}. \end{aligned}$$

Par croissance de la fonction  $u \mapsto u^2$  sur  $\mathbb{R}_+$ , on en déduit que :

$$\boxed{(f(x))^2 \leq x \int_0^x (f'(t))^2 dt}.$$

Soit  $x \in [0, 1]$ . Comme pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $(f'(t))^2 \geq 0$ , on a  $\int_0^x (f'(t))^2 dt \leq \int_0^1 (f'(t))^2 dt$ .

En effet, par la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale ( $x \leq 1$ ), on a :

$$\int_0^1 (f'(t))^2 dt - \int_0^x (f'(t))^2 dt = \int_x^1 (f'(t))^2 dt \geq 0.$$

Comme  $x \geq 0$ , on en déduit que  $(f(x))^2 \leq x \int_0^1 (f'(t))^2 dt$ .

Par croissance et linéarité de l'intégrale ( $0 \leq 1$  et intégrales de fonctions continues sur un segment), on obtient :

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx \leq \int_0^1 (f'(t))^2 dt \cdot \int_0^1 x dx.$$

Comme  $\int_0^1 x dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$ , on en déduit le résultat souhaité :

$$\boxed{\int_0^1 (f(x))^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (f'(t))^2 dt}.$$

*Exercice 3 : Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*

On commence par vérifier que la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est libre.

Calculons le déterminant de cette famille dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Par les opérations  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ , on obtient une matrice triangulaire.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

La famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est donc libre. Orthonormalisons-la à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.

◊ On a  $\|u_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ .

On pose alors  $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ .

◊ On calcule  $u'_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1$ .

$$\begin{aligned} u'_2 &= (1, -1, 1) - \frac{1}{3} \langle (1, -1, 1), (1, 1, 1) \rangle (1, 1, 1) \\ &= (1, -1, 1) - \frac{1}{3} (1 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 1) (1, 1, 1) \\ &= (1, -1, 1) - \frac{1}{3} (1, 1, 1) = \frac{2}{3} (1, -2, 1). \end{aligned}$$

On a  $\|u'_2\| = \frac{2}{3} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ .

On pose alors  $e_2 = \frac{u'_2}{\|u'_2\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$ .

◊ On calcule  $u'_3 = u_3 - \langle u_3, e_1 \rangle e_1 - \langle u_3, e_2 \rangle e_2$ .

$$\begin{aligned} u'_3 &= (1, 1, -1) - \frac{1}{3} \langle (1, 1, -1), (1, 1, 1) \rangle (1, 1, 1) - \frac{1}{6} \langle (1, 1, -1), (1, -2, 1) \rangle (1, -2, 1) \\ &= (1, 1, -1) - \frac{1}{3} \times 1 \times (1, 1, 1) - \frac{1}{6} \times (-2) (1, -2, 1) \\ &= (1, 1, -1) - \frac{1}{3} (1, 1, 1) + \frac{1}{3} (1, -2, 1) = (1, 0, -1). \end{aligned}$$

On a  $\|u'_3\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ .

On pose alors  $e_3 = \frac{u'_3}{\|u'_3\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ .

On a donc :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, -2, 1), \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, -1).$$

D'après le procédé de Gram-Schmidt, la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est une famille orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ .

Elle est donc libre et de cardinal  $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$  donc c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Ainsi :

$$\boxed{\text{la famille } (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^3.}$$

*Exercice 4 : Bases orthonormées*

1. Remarquons tout d'abord que  $(P_0, \dots, P_n)$  est bien une famille de  $E$  car pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P_i$  est un polynôme de degré  $i$  donc  $P_i \in \mathbb{R}_n[X]$ .

Soit  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$  avec  $i \neq j$ . Montrons que  $\langle P_i, P_j \rangle = 0$ .

On a  $\langle P_i, P_j \rangle = \sum_{k=0}^n P_i^{(k)}(a) P_j^{(k)}(a)$ .

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Comme  $P_i^{(k)}(X) = \begin{cases} i(i-1)\dots(i-k+1)(X-a)^{i-k} & \text{si } k \leq i \\ 0 & \text{si } k > i, \end{cases}$  on obtient en évaluant en  $a$  :

$$P_i^{(k)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < i \\ i! & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k > i \end{cases} = \begin{cases} i! & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même,  $P_j^{(k)}(a) = \begin{cases} j! & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Comme  $i \neq j$ , on en déduit que  $P_i^{(k)}(a)P_j^{(k)}(a) = \begin{cases} 0 \times 0 & \text{si } k \notin \{i, j\} \\ i! \times 0 & \text{si } k = i \\ 0 \times j! & \text{si } k = j \end{cases} = 0.$

Ainsi,  $\langle P_i, P_j \rangle = \sum_{k=0}^n 0 = 0.$

Donc :

la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est une famille orthogonale de  $E$ .

2. Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

On a :

$$\|P_i\| = \sqrt{\langle P_i, P_i \rangle} = \sqrt{\sum_{k=0}^n (P_i^{(k)}(a))^2} = \sqrt{(i!)^2} = |i!| = i!$$

car on a vu que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P_i^{(k)}(a) = \begin{cases} i! & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Ainsi :

pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\|P_i\| = i!$ .

Par suite, la famille  $\left(\frac{P_0}{0!}, \frac{P_1}{1!}, \dots, \frac{P_n}{n!}\right)$  est une famille orthonormée de  $E$  (car c'est une famille orthogonale de  $E$  et tous ses vecteurs sont de norme 1).

C'est donc en particulier une famille libre de  $E$  et elle est de cardinal  $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$  donc c'est une base de  $E$ .

Ainsi :

$\mathcal{B} = \left(\frac{P_0}{0!}, \frac{P_1}{1!}, \dots, \frac{P_n}{n!}\right)$  est une base orthonormée de  $E$ .

3. Soit  $P \in E$ .

Comme  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée de  $E$ ,  $P$  s'écrit  $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{P_k}{k!}$  avec pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$\alpha_k = \langle P, \frac{P_k}{k!} \rangle = \frac{1}{k!} \langle P, P_k \rangle = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^n P^{(i)}(a) P_k^{(i)}(a).$$

Comme pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P_k^{(i)}(a) = \begin{cases} k! & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ , on en déduit que  $\alpha_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) \times k! = P^{(k)}(a).$

On obtient donc la formule de Taylor pour les polynômes :

pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $P = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a) \frac{P_k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$

*Exercice 5 :*

1. Montrons l'inclusion  $\mathcal{S}_n \subset (\mathcal{A}_n)^\perp$ .

Soit  $M \in \mathcal{S}_n$  et  $N \in \mathcal{A}_n$ .

On a :

$$(M|N) = \text{tr}(M^\top N) = \text{tr}(MN) \text{ car } M^\top = M.$$

On a également par symétrie du produit scalaire :

$$(M|N) = (N|M) = \text{tr}(N^T M) = \text{tr}(-NM) = -\text{tr}(NM) = -\text{tr}(MN)$$

car  $N^T = -N$  et par les propriétés de la trace.

Ainsi,  $(M|N) = \text{tr}(MN) = -\text{tr}(MN)$  d'où  $(M|N) = 0$ .

On a ainsi prouvé que si  $M \in \mathcal{S}_n$  alors  $M$  est orthogonal à tous les éléments de  $\mathcal{A}_n$ .

On en déduit que  $\mathcal{S}_n \subset (\mathcal{A}_n)^\perp$ .

2. \* Soit  $M \in \mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n$ .

On a  $M^T = M$  car  $M \in \mathcal{S}_n$  et  $M^T = -M$  car  $M \in \mathcal{A}_n$  d'où  $M = -M$  donc  $M = 0_n$ .

On en déduit que les sous-espaces vectoriels  $\mathcal{S}_n$  et  $\mathcal{A}_n$  sont en somme directe.

\* Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

En posant  $M = \frac{A + A^T}{2}$  et  $N = \frac{A - A^T}{2}$ , on a  $A = M + N$  avec :

$$M^T = \frac{A^T + A}{2} = M \text{ donc } M \in \mathcal{S}_n \quad \text{et} \quad N^T = \frac{A^T - A}{2} = -N \text{ donc } N \in \mathcal{A}_n.$$

On en déduit que  $A \in \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$ .

On a donc prouvé l'inclusion  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$ .

L'inclusion réciproque étant évidente, on en déduit que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$ .

3. On a déjà prouvé que  $\mathcal{S}_n \subset (\mathcal{A}_n)^\perp$ .

De plus, comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$ , on a  $\dim(\mathcal{S}_n) + \dim(\mathcal{A}_n) = n^2$ .

Ainsi,  $\dim(\mathcal{S}_n) = n^2 - \dim(\mathcal{A}_n) = \dim((\mathcal{A}_n)^\perp)$  car  $\mathcal{A}_n \oplus (\mathcal{A}_n)^\perp = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ( $\mathcal{M}_n$  est de dimension finie).

On en déduit que  $\mathcal{S}_n = (\mathcal{A}_n)^\perp$ .

*Exercice 6 :*

1. Précisons les notations.

$X$  désigne la fonction  $t \mapsto t$ ,  $X^2$  désigne la fonction  $t \mapsto t^2$  et 1 est la fonction constante égale à 1.

$d(X^2, F)$  désigne la distance de  $X^2$  au sous-espace vectoriel  $F = \text{Vect}(1, X)$ .

Comme  $F$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie, on a par définition :

$$(d(X^2, F))^2 = \left( \min_{P \in F} \|X^2 - P\| \right)^2 = \left( \min_{P \in F} \sqrt{\int_0^1 (t^2 - P(t))^2 dt} \right)^2 = \left( \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \sqrt{\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt} \right)^2.$$

Comme  $x \mapsto x^2$  est une fonction croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , on en déduit que :

$$(d(X^2, F))^2 = \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \Delta.$$

L'existence de  $\Delta$  est ainsi garantie et on a :

$$\Delta = (d(X^2, F))^2.$$

2. Comme  $F$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie, le projeté orthogonal de  $X^2$  sur  $F$  est bien défini. Déterminons  $p_F(X^2)$ .

\* *Méthode 1 : en utilisant la caractérisation du projeté orthogonal*

Soit  $P \in F$ .

$$P = p_F(X^2) \Leftrightarrow P \in F \text{ et } X^2 - P \in F^\perp$$

$$\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } P = aX + b \text{ et } \begin{cases} \langle X^2 - P, 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 - P, X \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } P = aX + b \text{ et } \begin{cases} \langle X^2 - aX - b, 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 - aX - b, X \rangle = 0. \end{cases}$$

Or :

$$\begin{cases} \langle X^2 - aX - b, 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 - aX - b, X \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^1 (t^2 - at - b) dt = 0 \\ \int_0^1 (t^2 - at - b)t dt = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[ \frac{1}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2 - bt \right]_0^1 = 0 \\ \left[ \frac{1}{4}t^4 - \frac{a}{3}t^3 - \frac{b}{2}t^2 \right]_0^1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{a}{2} - b = 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 6b = 2 \\ 4a + 6b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{6}. \end{cases}$$

On en déduit que  $p_F(X^2) = X - \frac{1}{6}$ .

\* Méthode 2 : en orthonormalisant une base de  $F$

On a  $F = \text{Vect}(1, X)$  et  $(1, X)$  est une famille libre donc  $(1, X)$  est une base de  $F$ .

Orthonormalisons la famille  $(1, X)$ .

On a  $\|1\| = \sqrt{\int_0^1 1^2 dt} = 1$  donc on pose  $P_1 = 1$ .

Calculons  $X - \langle X, P_1 \rangle P_1 = X - \left( \int_0^1 t dt \right) \cdot 1 = X - \left[ \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = X - \frac{1}{2}$

et  $\|X - \frac{1}{2}\| = \sqrt{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) dt} = \sqrt{\left[ \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t \right]_0^1} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ .

On pose alors  $P_2 = \frac{X - \frac{1}{2}}{\|X - \frac{1}{2}\|} = 2\sqrt{3}X - \sqrt{3}$ .

Ainsi,  $(P_1, P_2) = (1, 2\sqrt{3}X - \sqrt{3})$  est une base orthonormée de  $F$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} p_F(X^2) &= \langle X^2, 1 \rangle \cdot 1 + \langle X^2, 2\sqrt{3}X - \sqrt{3} \rangle \cdot (2\sqrt{3}X - \sqrt{3}) \\ &= \left( \int_0^1 t^2 dt \right) \cdot 1 + (2\sqrt{3})^2 \left( \int_0^1 t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt \right) \left(X - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left[ \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 + 12 \left[ \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3 \right]_0^1 \left(X - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3} + 12 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \left(X - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3} + X - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que  $p_F(X^2) = X - \frac{1}{6}$ .

3. On a  $d(X^2, F) = \|X^2 - p_F(X^2)\| = \|X^2 - X + \frac{1}{6}\|$ .

On a donc :

$$\Delta = \|X^2 - p_F(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|p_F(X^2)\|^2$$

d'après le théorème de Pythagore  $(X^2 - p_F(X^2)) \perp p_F(X^2)$  puisque  $X^2 - p_F(X^2) \in F^\perp$  et  $p_F(X^2) \in F$ .

Or,  $\|X^2\|^2 = \int_0^1 t^4 dt = \left[ \frac{1}{5}t^5 \right]_0^1 = \frac{1}{5}$  et  $\|p_F(X^2)\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{6}\right)^2 dt = \left[ \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{36}t \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}$ .

Ainsi,  $\Delta = \frac{1}{5} - \frac{7}{36}$  donc :

$$\Delta = \frac{1}{180}.$$