Algèbre - Chapitre 10

Espaces vectoriels : généralités

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Structure d'espace vectoriel

1) L'exemple de $\mathbb{K}^n$

a) Rappels et notations

Définition :

Soit E un ensemble. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note E^n l'ensemble $\underbrace{E \times E \times \ldots E}_{\text{n fois}}$.

- Les éléments de E^n sont appelés **n-uplets** d'éléments de E (ou $n-$ listes en dénombrement et probabilité...).
- Si $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un $n-$uplet, on dit que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les **composantes** du n-uplet.
- Le n-uplet $(0, 0, 0, \ldots, 0)$ est noté $0_{\mathbb{K}^n}$ (lire : "zéro de $\mathbb{K}^n$").

b) Addition

On munit $\mathbb{K}^n$ de l'opération d'addition de la façon suivante :

Définition :

Soient $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ deux éléments de $\mathbb{K}^n$.
On définit l'opération $u + v$ par :

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Autrement dit : on additionne composante par composante.

- Comme u et v sont des éléments de $\mathbb{K}^n$, on dit que l'opération $+$ est "interne".
- On remarque que $u + v \in \mathbb{K}^n$: on dit que $\mathbb{K}^n$ est **stable par addition**.

Exemple :
si $u = (1, 4, 5, 6)$ et $v = (1, -2, 4, -3)$, alors $u + v =$

Propriété 1 :

Soient u, v et w trois n-uplets de $\mathbb{K}^n$, alors on a :

(i) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (associativité),
(ii) $u + v = v + u$ (commutativité),
(iii) $u + 0_{\mathbb{K}^n} = u$ ($0_{\mathbb{K}^n}$ est neutre pour $+$),
(iv) il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $u + x = 0_{\mathbb{R}^n}$ (x est l'opposé de u).

▷ *Preuve* : Immédiat en utilisant les propriétés de l'addition dans $\mathbb{K}$. ◁

c) Multiplication par un "scalaire"

On munit $\mathbb{K}^n$ d'une opération de multiplication par un nombre de la manière suivante :

Définition :

Soit $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on définit le n-uplet λu par

$$\lambda u = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

- Comme λ n'appartient pas à $\mathbb{K}^n$, on dit que l'opération est "externe".
- On observe que $\lambda u \in \mathbb{K}^n$: l'espace $\mathbb{K}^n$ est stable par multiplication par un scalaire.

Exemple :
si $u = (0, 1, -2)$, alors $3u =$

Propriété 2 :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, u et v deux éléments de $\mathbb{K}^n$, alors on a :

(i) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ (distributivité à droite),

(ii) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (distributivité à gauche),

(iii) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ (associativité),

(iv) $1.u = u$ (neutre pour la multiplication).

▷ *Preuve* : Encore une fois immédiat via les propriétés de multiplication des réels. ◁

On peut "combiner" la somme et la multiplication externe pour faire des combinaisons linéaires :

Définition :

Soient u et v deux n-uplets. On appelle **combinaison linéaire** de u et de v tout n-uplet w s'écrivant

$$w = \lambda u + \nu v$$

où λ et ν sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Exemples :

- $3(1, 0, 2) - 2(-1, 3, 2)$ est une combinaison linéaire de $u = (1, 0, 2)$ et $v = (-1, 3, 2)$.
- Soit $u = (1, -1, 1)$ et $v = (2, 0, 3)$. Montrons que $w = (0, -2, -1)$ est une combinaison linéaire de u et v :

2) Espaces vectoriels

a) Définitions :

Les opérations définies précédemment sont les mêmes que celles qui ont lieu sur les vecteurs en géométrie. On peut les définir de façon analogue dans de nombreux ensembles, dont $\mathbb{K}^n$. Les ensembles qui ont ces propriétés sont appelés "espaces vectoriels". Plus précisément :

Définition :

On appelle $\mathbb{K}-$**espace vectoriel** tout ensemble non vide E muni de deux lois :

◊ une loi $+$ (dite interne) telle que, pour tout u,v,w éléments de E on a :

(i) $u+v \in E$ (E est stable par $+$),

(ii) $u+v=v+u$ (commutativité),

(iii) $(u+v)+w=u+(v+w)$ (associativité),

(iv) il existe un élément noté O_E tel que, pour tout $u \in E$, $u+O_E=u$ (existence d'un neutre pour $+$),

(v) Pour tout u, il existe $v \in E$ tel que $u+v=O_E$ (existence d'un opposé).

◊ une loi de multiplication (dite externe) par un élément de $\mathbb{K}$, vérifiant, pour tout u, v de E et tout λ, μ dans $\mathbb{K}$:

(vi) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in E$, $\lambda.u \in E$ (E est stable par le produit externe),

(vii) $(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$,

(viii) $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$,

(ix) $(\lambda\mu)u=\lambda(\mu u)$,

(x) $1.u=u$

A noter : VOCABULAIRE

- Par analogie avec la géométrie, un élément $u \in E$ est appelé **vecteur** et est souvent noté $\vec{u}$.
- Un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé **scalaire**.
- O_E est appelé **vecteur nul**. Il est parfois noté $\vec{0}$.

Souvent, si il n'y a pas de confusion entre les vecteurs et les scalaires, on abandonne les flèches au dessus des vecteurs. Ainsi, dire $u \in E$ en considérant que E est un espace vectoriel suffit pour dire que u est un vecteur.

b) Exemples : espaces vectoriels de références à connaître !

L'ensemble $\mathbb{K}^n$:

Muni de l'addition et de la multiplication telles qu'indiquées en début de chapitre, l'ensemble des $n-$uplets de $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.

Le vecteur nul est

Cas particulier : $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$

Les ensembles scalaires sont eux même des espaces vectoriels : $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$\mathbb{C}$ peut également être vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, puisque les propriétés de multiplications par un réel sont les mêmes....

En revanche $\mathbb{R}$ ne peut pas être vu comme un $\mathbb{C}$ espace vectoriel puisqu'il n'est pas stable par multiplication par un complexe.

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:
On a vu que pour additionner deux matrices de même taille, on additionnait terme à terme pour obtenir une matrice de même taille. De même, on a défini la multiplication par un scalaire en multipliant tous les coefficients de la matrice.

Toutes les propriétés vues l'espace vectorielle $\mathbb{K}^n$ sont vérifiées avec $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, qui est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Le vecteur nul est alors

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes :
On a vu que la somme de polynômes est un polynôme, de même que la multiplication par un scalaire.

On a à nouveau les dix propriétés de l'espace vectoriel et donc $\mathbb{K}[X]$ est un espace vectoriel.
Le polynôme qui joue le rôle du vecteur nul est

L'ensemble des applications d'un ensemble E dans un espace vectoriel F, noté F^E
Soient E un ensemble et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soient f et g deux applications définies sur E à valeurs dans F.
On définit $f+g$ comme étant l'application $x \mapsto f(x)+g(x)$,
et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$.

On peut alors vérifier les 10 propriétés définissant un espace vectoriel, par exemple :

Le vecteur nul est

L'ensemble des suites réelles ou complexes
C'est un cas particulier de l'ensemble F^E où $E=\mathbb{N}$ et $F=\mathbb{K}$. C'est donc un espace vectoriel et le vecteur nul est

c) Combinaisons linéaires

Définition :

Soient $u_1, u_2, \dots, u_p$ p vecteurs d'un espace vectoriel E.
On dit qu'un vecteur u est **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, u_2, \dots u_p$ si et seulement si il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots \lambda_p u_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$$

Exemples :

- $(2,1,0)$ est combinaison linéaire de $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(1,1,0)$:

- La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de I_3 et d'une matrice N niplotente :

- $P(X) = X^2 + 3X - 1$ est combinaison linéaire de

Définition :

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots u_p)$ une liste de vecteurs (on dit aussi *famille de vecteurs*) de E.
On note $Vect(\mathcal{F})$, $Vect(u_1, u_2, \dots, u_p)$ ou encore $Vect(u_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$

Au secours ! **VECT... COMME VECTEUR ?**

La notation $Vect(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est ambigüe : il s'agit bien d'un ensemble de vecteurs, et pas d'un seul. Il faut le voir comme "l'ensemble des vecteurs fabriqués à partir de $u_1, \dots, u_p$".

Exemples :

- Dans l'exemple précédent $(2,1,0) \in Vect\left((1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\right)$.
  On a par exemple aussi $(3,2,0) \in Vect\left((1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\right)$, puisque

  $$(3,2,0) = 2(1,0,0) + (0,1,0) + (1,1,0)$$

  En revanche, $(1,1,1) \notin Vect\left((1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\right)$ car

- Le polynôme $P = X^2 + 3X - 1$ est une combinaison linéaire de X^2, X et 1, donc $P \in Vect(X^2, X, 1)$

  En fait, tout les polynômes de $\mathbb{K}_2[X]$ sont des combinaisons linéaires de X^2, X et 1, puisqu'ils s'écrivent $aX^2 + bX + c$ avec a, b et c réels ou complexes.
  Ainsi $\mathbb{K}_2[X] = Vect(X^2, X, 1)$

II Sous espaces vectoriels

Dans toute cette section, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) Généralités :

a) Definition

Définition :

Soit $F \subset E$. On dit que F est un **sous espace vectoriel de** E si et seulement si c'est un ensemble non vide et stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire :

(i) $F \neq \emptyset$

(ii) $\forall u, v \in F$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda u + \mu v \in F$

Propriété 3 :

Si F est un sous espace vectoriel de E, alors $0_E \in F$

▷ *Preuve* :

◁

Définition alternative :

On peut avoir besoin d'une caractérisation plus longue a priori, mais parfois plus simple :

Proposition 1 :

F est un sous espace vectoriel si et seulement si

(i) $0_E \in F$ (F contient le vecteur nul)

(ii) pour tout vecteur $\vec{u}, \vec{v}$ de F, $\vec{u} + \vec{v} \in F$ (stabilité pour la loi $+$)

(iii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $\vec{u} \in F$, $\lambda\vec{u} \in F$ (stabilité pour la multiplication externe)

▷ *Preuve* :

◁

Propriété 4 :
Soit F un sous espace vectoriel de E, alors F est lui même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

▷ *Preuve :* Les propriétés de stabilités sont dans la définition d'un s.e.v. Pour les autres propriétés (commutativité, etc...), elles proviennent directement du fait que si $u \in F$, alors $u \in E$, donc toutes les propriétés de E se "transmettent" à F.

◁

b) Exemples :

- L'espace $F = \{O_E\}$ est un sous espace vectoriel de E. On l'appelle **sous espace nul**.

- Soit $u \in E$, $u \neq O_E$. Soit $F = \{\lambda u; \lambda \in \mathbb{K}\}$. Alors F est un sous espace vectoriel de E, appelé **droite vectorielle** dirigée par u.

- Dans $\mathbb{R}^3$, on appelle **plan vectoriel** tout plan passant par $(0, 0, 0)$. Un tel plan a pour équation cartésienne $ax + by + cz = 0$ avec a, b, c non tous nul.
  Autrement dit, un plan vectoriel est un espace de la forme
  $$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = 0\}$$
  Montrons que c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$:

- ► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$:

c) Intersection de sous espaces vectoriels

Proposition 2 :

Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de E également.

▷ *Preuve* :

◁

Exemple :
Soit l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0 \text{ et } z = 0\}$. Pour montrer que c'est sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on peut vérifier les propriétés, ou alors le voir comme intersection

Corolaire 1 : généralisation

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous espaces vectoriels de E.
Alors $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ est un sous espace vectoriel de E.

▷ *Preuve* : Par récurrence.... ◁

Danger ! **UNION D'ESPACE VECTORIEL**

En général, l'union de sous espace vectoriels n'est pas un espace vectoriel !

Exemple :
Soit E l'ensemble des polynômes constants et F l'ensemble des polynômes de la forme aX avec $a \in \mathbb{R}$.
On montre facilement que E et F sont des s.e.v de l'ensemble des polynômes.
Mais $E \cup F$ n'est pas un s.e.v :

2) Sous espace vectoriel engendré

a) Définition

Proposition 3 : et définition

Soient $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.
Alors l'ensemble $Vect(\mathcal{F})$ est un sous espace vectoriel de E.
Il est appelé **sous espace vectoriel engendré** par la famille $(u_1, u_2, \ldots u_p)$.

▷ *Preuve* :

◁

Remarque :
Si un espace vectoriel F contient les vecteurs $u_1, u_2, \dots u_p$, alors, comme F est stable par combinaisons linéaires, il contient nécessairement toutes les combinaisons linéaires des u_i, c'est à dire que $Vect(u_1, u_2, \dots u_p) \subset F$.
Ceci se traduit par la proposition suivante :

Proposition 4 :

Soit F un sous espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de F.
Alors $Vect(\mathcal{F}) \subset F$.

Autrement dit, $Vect(\mathcal{F})$ est, au sens de l'inclusion, le plus petit sous espace vectoriel contenant les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$.

b) Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

2. Soit $E = \{(x, 3x + y, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

A noter : **NON UNICITÉ !**

Des vecteurs différents peuvent engendrer le même espace.
Par exemple avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, on a $Vect(e_1, e_2) = \mathbb{R}^2$, mais on peut montrer aussi $Vect((0, 2), (-3, 0)) = \mathbb{R}^2$, ou encore : $Vect((1, 1), (-1, 1)) = \mathbb{R}^2$...

3) Somme de deux sous espaces vectoriels

a) Généralités

Définition :
Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
On appelle **somme de** F **et de** G l'ensemble noté $F+G$ défini par

$$F+G=\{u+v; u\in F \text{ et } v\in G\}$$

Autrement dit, dire qu'un vecteur $w\in F+G$ signifie qu'on peut écrire w sous la forme $u+v$ avec $u\in F$ et $v\in G$.

Exemples :

- Soit $F=\mathrm{Vect}((1,0))$ et $G=\mathrm{Vect}((0,1))$.
  Tout vecteur $(x,y)\in\mathbb{K}^2$ s'écrit sous la forme $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$ donc $\mathbb{K}^2=F+G$
- On peut voir $\mathbb{K}_2[X]$ comme étant $\mathbb{K}_1[X]+\mathbb{K}_2[X]$:

Propriété 5 :
Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors $F+G$ est un sous espace vectoriel de E.

▷ *Preuve* :

◁

Propriété 6 :
Soit E un espace un espace vectoriel et F et G deux sous espaces vectoriels.
Si $F=Vect(\mathcal{F})$ et $G=Vect(\mathcal{G})$ avec $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des familles de vecteurs, alors $F+G=Vect(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})$

▷ *Preuve* :

◁

Exemple :
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z = 0\}$ et $G = \{(z, z, z) ; z \in \mathbb{R}\}$.

b) Somme directe

Définition :

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
On dit que F et G sont en **somme directe** si et seulement si pour tout vecteur w de $F + G$, il existe un unique $u \in F$ et un unique $v \in G$ tels que $w = u + v$.
On note alors $F \oplus G$ au lieu de $F + G$.

Proposition 5 :

F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{O_E\}$

▷ *Preuve* :

◁

Exemples :

- Avec $F = \text{Vect}((1,0))$ et $G = \text{Vect}((0,1))$, on a $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.
  En effet :

- Pour $\mathbb{K}_1[X] + \mathbb{K}_2[X]$:

c) Espaces supplémentaires

Définition :

Soit E un espace vectoriel. Deux sous espaces vectoriels F et G sont dit **supplémentaires** dans E si et seulement si $E = F \oplus G$.

Autrement dit : tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^2$,Vect$((1;0))$ et Vect$((0;1))$ sont des s.e.v. supplémentaires.
- Les espaces $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ et $G = \{(z,z,z); z \in \mathbb{R}\}$ sont supplémentaires.

III Familles de vecteurs dans un s.e.v.

1) Familles génératrices

Un des intérêts des espaces vectoriels est qu'ils peuvent être construits à partir d'un nombre restreint de vecteurs : c'est la notion de famille génératrice.

Définition :

Soit E un espace vectoriel et soit $(u_1, u_2, \dots u_p)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que cette famille est **génératrice** de E si et seulement si $E = Vect(u_1, u_2, \dots u_p)$.

Exemples :

- On a vu que $\mathbb{K}_2[X]$ peut s'écrire comme $Vect(1, X, X^2)$. Ainsi, les trois polynômes 1, X et X^2 constituent une famille génératrice de $\mathbb{K}_2[X]$.
  De manière générale, une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ est
- Une famille génératrice de l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est
- Dans l'exemple 2 page 10, $(1, 3, 0)$ et $(0, 1, 1)$ est une famille génératrice de l'ensemble $E = \{(x, 3x + y, y) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
- Soit E l'ensemble des suites réelles vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$.

Méthode : **Montrer qu'une famille est génératrice**

Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est génératrice d'un s.e.v E, on peut procéder de la façon suivante :

- ▶ Les vecteurs de la famille sont-ils bien dans E ? Si oui, on a déjà $Vect(u_1, \dots, u_p) \subset E$
- ▶ On considère ensuite un vecteur $u \in E$ et on cherche des λ_i tel que

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$$

Autrement dit : est-ce que tout vecteur u est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$?.
Si on trouve **au moins une solution**, et ce quel que soit u, alors $E \subset Vect(u_1, \dots, u_p)$.

- ▶ Par double inclusion, on a alors $E = Vect(u_1, \dots, u_p)$.

Exemple :
Montrons que $u_1 = (1,2)$ et $u_2 = (0,2)$ constituent une famille génératrice de $E = \mathbb{R}^2$:

2) Familles libres, famille liées

a) Définition

Définition :

Une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est dite **liée** si et seulement si on peut avoir

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots \lambda_p u_p = O_E$$

avec au moins un λ_i non nul.

Exemple :
$(1,0,0), (0,1,0)$ et $(1,1,0)$ constituent une famille liée, car on peut écrire :

$$(1,0,0) + (0,1,0) - (1,1,0) = (0,0,0)$$

Au secours ! ÇA VEUT DIRE QUOI ?

Cette définition, abstraite, est la façon la plus maniable mathématiquement pour dire qu'au moins un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.
En effet, si $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots \lambda_p u_p = \vec{0}$ avec par exemple $\lambda_1 \neq 0$, on a alors

$$\lambda_1 u_1 = -\lambda_2 u_2 - \ldots - \lambda_p u_p, \text{ d'où } u_1 = \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2 u_2 - \ldots - \lambda_p u_p)$$

Ainsi, u_1 s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

Dans l'exemple de la page 4, on a $(1,0,0) + (0,1,0) - (1,1,0) = (0,0,0)$ ce qui est bien équivalent à $(1,1,0) = (1,0,0) + (0,1,0)$.

Méthode : MONTRER QU'UNE FAMILLE EST LIÉE

Pour tester si une famille de vecteur u_1, u_2, …, u_p est liée, on résout l'équation suivante, d'inconnue $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots \lambda_p u_p = 0_E$$

Si on trouve des solutions non nulles, c'est que la famille est liée.

Exemples :

- Dans $E = \mathbb{R}^3$, la famille $(1,4,0),(1,2,1),(-1,0,-2)$ est liée :

- Une famille de vecteurs qui contient le vecteur nul est toujours liée :

b) Familles libres :

Définition :

Une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est dite **libre** si et seulement si elle n'est pas liée, c'est à dire si et seulement

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots \lambda_p u_p = O_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$$

Cela signifie qu'aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres.

Méthode : Comment montrer qu'une famille est libre ?

Pour tester si une famille d'un espace E est libre, on résout l'équation d'inconnue $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots \lambda_p u_p = 0_E$$

Si la seule solution est $\lambda_1 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$, c'est que la famille est libre.

Exemple :

- Soient $\vec{u}_1 = (1,0,1)$, $\vec{u}_2 = (0,1,1)$ et $\vec{u}_3 = (1,1,0)$.

- Soit $\mathcal{F}$ une famille de polynômes de degré distincts, alors la famille est libre :

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une famille libre.

c) Ajout de vecteur à une famille libre

Proposition 6 :

Soient $\mathcal{F}$ une famille libre de vecteur E, et $u \in E$.
Alors $\mathcal{F} \cup \{u\}$ est libre si et seulement si $u \notin Vect(\mathcal{F})$.
(ou, de manière équivalente, $\mathcal{F} \cup \{u\}$ est lié si et seulement si $u \in Vect(\mathcal{F})$.)

▷ *Preuve* :

◁

Exemple :
Soit $E = \{(x, 3x + y, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. On sait que $E = Vect((1, 3, 0), (0, 1, 1))$ est un plan vectoriel et on cherche une droite vectorielle qui soit en somme directe avec E.

d) Cas particulier de 2 vecteurs

Définition :

Soient u et v deux vecteurs de E. On dit que u et v sont **colinéaires** si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, u = \lambda v \text{ ou } v = \lambda u.$$

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1, 2, 3)$ et $(2, 4, 6)$ sont colinéaires.
- Les polynômes $P = X^2 + X + 1$ et $Q = -X^2 - X - 1$ sont colinéaires.
- Pour tout espace vectoriel E, $u = 0_E$ est colinéaire à tous les vecteurs.

Propriété 7 :

Une famille constituée de deux vecteurs u et v est liée si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires.

▷ *Preuve* :

◁

Danger ! **Erreur fréquente :**
Ce raisonnement n'est valable que pour deux vecteurs. Vous pouvez tout à fait avoir 3 vecteurs avec aucun colinéaire aux autres, mais que la famille soit liée quand même. C'est le cas des vecteurs $(1, 4, 0), (1, 2, 1), (-1, 0, -2)$ qui sont liés sans être colinéaires pour autant.

3) Bases

a) Définitions

Définition :

On appelle **base d'un espace vectoriel** E toute famille à la fois génératrice de E et libre.

Proposition 7 :

On admet pour le moment que si un espace vectoriel admet une famille finie comme base, alors toutes les bases de cet espace ont le même nombre d'éléments et on appelle dimension de E, noté $dim(E)$, le cardinal commun à ces bases.

Exemples :

- Dans $E = \mathbb{K}^n$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $e_k = (0, ..., 0, 1, 0, ...0)$ où le 1 est la $k$ième composante.

  Cette famille est génératrice de E :

  Montrons qu'elle est libre :

  C'est donc une base de $\mathbb{K}^n$, et c'est la base la plus naturelle : on l'appelle "base canonique" de $\mathbb{K}^n$.

- Dans $\mathbb{K}_2[X]$, on a vu que $(1, X, X^2)$ est une famille génératrice et libre. C'est donc une base de $\mathbb{K}_2[X]$ et cet espace est de dimension 3.

  De manière général, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1, X, \dots X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
  Ainsi $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension

- L'ensemble des polynômes (sans précision de degré) a une base "infinie" : $(1, X, X^2, \dots)$ sans limite de puissance...

b) Unicité d'écriture

Theorème 1 :

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Soit $u \in Vect(\mathcal{F})$. Alors il existe un unique p-uplet de scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ tel que

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$$

▷ *Preuve* :

◁

A noter : **IL EXISTE UN "UNIQUE" !**

Ce qui est important dans ce résultat, c'est **l'unicité de l'écriture.**
On sait déjà que si $u \in Vect(\mathcal{F})$, u est combinaison linéaire des u_i. Ce qu'on a obtient en plus dans le cas où la famille est libre, c'est l'unicité de cette combinaison linéaire.

c) Coordonnées et représentation matricielle :

Définition :

Soit E un sous espace vectoriel et $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ une base de E. Soit $u \in E$. On appelle **coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$** l'unique n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$$

Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur d'un s.e.v E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ (donc $u = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$).

On définit la matrice de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice colonne

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemples

- Dans $E = \mathbb{R}^2$. Soit $u = (0,2)$ et $\mathcal{C} = ((1,0),(0,1))$, on a $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  Si on prend comme base $\mathcal{B} = ((1,1),(-1,0))$, alors :

- Dans la base $\mathcal{B} = ((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1))$ le vecteur $\vec{u} = (2,1,1)$ s'écrit

$$(2,1,1) = \mathbf{1}(1,1,0) + \mathbf{0}(0,1,1) + \mathbf{1}(1,0,1)$$

  Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont donc

- Dans $E = \mathbb{K}_2[X]$ avec la base $(1, X, X^2)$, le polynôme $P(X) = 3X^2 - X + 1$ a pour matrice

Remarques :

- Lorsqu'on travaille de manière matricielle, il faudra systématiquement dire dans quelle base on travaille, sinon, les calculs n'auront aucun sens.
- Lorsqu'on représente les coordonnées de vecteurs sous forme de matrices, on les représente TOUJOURS avec des colonnes.
- Du fait qu'un vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ a pour représentation matricielle dans la base canonique $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on identifiera souvent $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.