2. (a) Le coupe-bande à 50Hz permet de supprimer le signal d'alimentation des appareils électriques toujours un peu présent par induction dans le circuit. Cela n'est pas nécessaire pour les signaux oculaires qui sont à beaucoup plus basse fréquence (0,002Hz à 10Hz), on pourrait prévoir un filtrage passe bas plutôt.
   (b) Pour éliminer un signal haute fréquence, il faut utiliser un filtre passe-bas.
   (c) i. On écrit (ou on reconnaît un filtre passe bas d'ordre 2) :

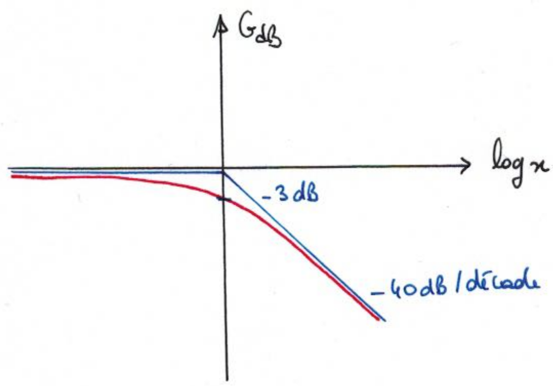
$$\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + jx\sqrt{2}}$$

Asymptote basse fréquence : $\underline{H} \sim 1$; $G_{dB1} = 0$dB : asymptote horizontale.
Asymptote haute fréquence : $\underline{H} \sim \frac{1}{-x^2}$; $G_{dB2} = -40\log(x)$ asymptote à -40dB/décade.
L'intersection des asymptotes se fait en $x = 1, G_{dB} = 0$. Il n'y a pas de résonance pour $Q = 1/\sqrt{2}$ dans le cas d'un filtre passe-bas d'ordre 2 (on a du coup une réponse très plate).

ii. La fréquence de coupure à -3dB est la fréquence pour laquelle $|\underline{H}| = \frac{|\underline{H}|_{max}}{\sqrt{2}}$. Ici :

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$$

On a ainsi $|H|_{max} = 1$ et $x_c = 1$. La fréquence de coupure vaut donc $f_c = f_o = 15$Hz.



3. (a) Le critère de Nyquist-Shannon indique que pour échantillonner un signal de fréquence f il faut utiliser une fréquence d'échantillonnage de fréquence $f_e > 2f$.
   (b) Pour les signaux oculaires la fréquence maximale est de 10Hz, il faut donc utiliser au minimum une fréquence d'échantillonnage $f_e = 20$Hz. Pour une durée de $\Delta t = 60$s, on a alors :

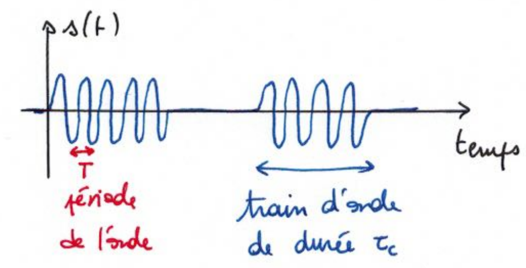
$$N = \frac{\Delta t}{T_e} = \Delta t f_e$$

soit 1200 points.
   (c) Sur la figure on observe un retard d'environ 0,25 s ((1/4 de division).

Partie B - Biométrie de l'œil par interférométrie à cohérence partielle

B-I Obtention d'interférences

1. (a)
   (b) La longueur de cohérence peut être supérieure à 10^2 m ce qui donne un temps de cohérence supérieur à la microseconde (variable d'un modèle à un autre).



(c) La longueur de cohérence :

$$L_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = c\tau_c \Rightarrow \tau_c = \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}$$

On trouve un temps de cohérence de $4,5.10^{-14}$s, cette source est peu cohérente.

(d) La longueur de cohérence :

$$L_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = c\tau_c$$

On trouve $1,3.10^{-5}$m pour la source précédente.

(e) Une source parfaitement monochromatique aurait une longueur de cohérence infinie.

2. (a) La différence de chemin optique, dans un milieu homogène d'indice n :

$$\delta = n(d_2 - d_1)$$

(b) Les deux vibrations ont la même longueur d'onde $\lambda_o = \frac{2\pi c}{\omega_o}$ on peut utiliser la notation complexe :

$$\underline{s}_1(P) = s_{o1}e^{i(\omega_o t - \varphi_1(P))} \quad \underline{s}_2(P) = s_{o2}e^{i(\omega_o t - \varphi_2(P))}$$

avec $\varphi_1(P) = \frac{2\pi}{\lambda_o}nd_1$, $\varphi_2(P) = \frac{2\pi}{\lambda_o}nd_2$ (pour des sources S_1 et S_2 en phase).

$$\underline{s}_{tot} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2$$

L'intensité lumineuse :

$$I_{tot} = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{s}_{tot}\underline{s}_{tot}^*)$$

Soit :

$$I_{tot} = \frac{s_{o1}^2}{2} + \frac{s_{o2}^2}{2} + s_{o1}s_{o2}\cos(\varphi_2(P) - \varphi_1(P))$$

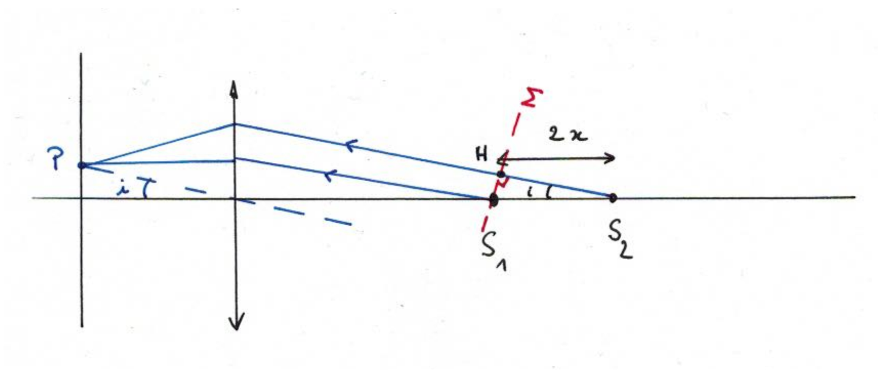
On identifie : $I_1 = \frac{s_{o1}^2}{2}$, $I_2 = \frac{s_{o2}^2}{2}$ et on obtient :

$$I_{tot} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_o}\delta\right)$$

(c) Dans le cas $I_1 = I_2 = I_o$, on obtient la formule de Fresnel :

$$I_{tot} = 2I_o\left(1 + cos(\Phi)\right)$$

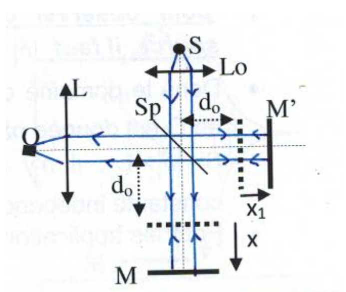
avec $\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_o}\delta$



B-II interféromètre de Michelson réglé en lame d'air

1. On note S_1 l'image de S par Sp et M', S_2 l'image de S par M et Sp. La distance $S_1S_2 = 2x$. Soit P un point sur l'écran repéré par l'angle i, Σ une surface d'onde pour un point source en P, les points H et S_1 appartiennent à Σ donc les chemins optiques S_1P et HP sont identiques (théorème de Malus). La différence de marche vaut donc $\delta = S_2H = n_aS_1S_2\cos i = 2n_ax\cos i$ où n_a représente l'indice de l'air.
2. Les points correspondant à δ =constante sont ceux qui correspondent au même angle i : on observe donc des anneaux concentriques sur l'écran.
3. On déplace le miroir M en faisant rentrer les anneaux vers l'intérieur : on observe de moins en moins d'anneaux de plus en plus gros. Il peut arriver qu'on dépasse la teinte plate : les anneaux sortent alors qu'on n'a pas changé le sens de déplacement de M : il suffit alors de revenir en arrière.

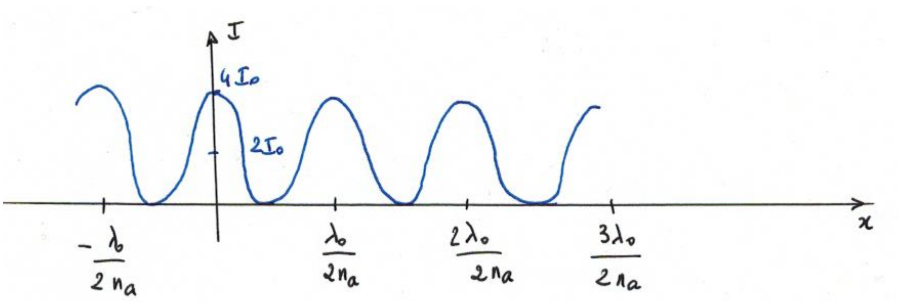
B-III Mesure de position



1. (a) Le faisceau issu de S est parallèle à l'axe optique.
   (b) On a alors :
   $$\delta = 2n_a(x - x_1)$$
   (c) L'ordre d'interférence :
   $$p = \frac{\delta}{\lambda_o}$$
   (d) À l'ordre 0, on a $x_o = x_1$, la détection de l'ordre 0 permet donc bien de mesurer x_1 à partir de x_o.
2. (a)
   $$I(O) = 2I_o\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_o}2n_a(x - x_1)\right)\right)$$
   (b) Si l'intensité est maximale lorsque x=0 alors :
   $$2n_ax_1 = p\lambda_o$$

avec p entier. Les positions de x générant des maxima d'intensité suivantes correspondent alors à $2n_a x_k = k\lambda_o$ avec k entier soit :

$$x_k = k\frac{\lambda_o}{2n_a}$$



(c) La courbe est périodique et on en peut pas repérer l'état d'ordre 0 sur la courbe si la source est parfaitement monochromatique.

3. (a) L'état d'ordre 0 correspond à $x_o = x_1$. On a $\delta = 0$ toutes les ondes sont en phase quelles que soient leur longueur d'onde.

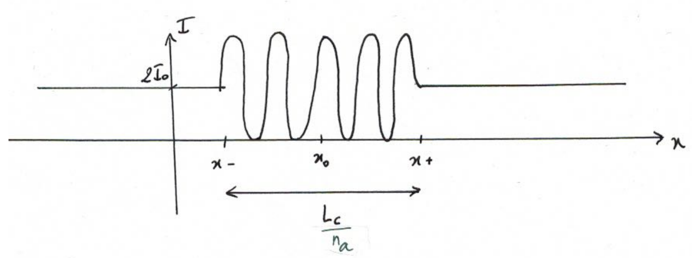
(b) On a :

$$2n_a(x_+ - x_1) = L_c \Rightarrow x_+ = x_1 + \frac{L_c}{2n_a} = x_o + \frac{L_c}{2n_a}$$
$$2n_a(x_- - x_1) = -L_c \Rightarrow x_- = x_1 - \frac{L_c}{2n_a} = x_o + \frac{L_c}{2n_a}$$

(c) On observe donc N maxima avec :

$$N = \frac{2L_c/(2n_a)}{\lambda_o/(2n_a)} = \frac{2L_c}{\lambda_o}$$

(d) Intensité constante en dehors de $[x_o - \frac{L_c}{2n_a}, x_o + \frac{L_c}{2n_a}]$.



(e) On ne détecte pas la position d'un maximum mais une zone sur laquelle l'intensité varie. Cette zone est centrée en x_o et sa largeur est :

$$2\Delta x_o = \frac{L_c}{n_a}$$

La précision est améliorée en tenant compte du profil spectral de la source utilisée comme illustré sur la figure 7.

B-IV Application à la biométrie de l'œil

1. Le faisceau 2 fait un aller-retour $2x$ dans l'air d'indice n_a quand le faisceau 1 fait un aller-retour $2D_c$ dans d'indice n_c, on a ainsi :

$$\delta = 2(n_c D_c - n_a x)$$

2. La position x_B correspond à $\delta = 0$:

$$x_B = \frac{n_c D_c}{n_a}$$

3. Et :

$$D_c = \frac{x_B n_a}{n_c}$$

B-V Enregistrement

1. Entre P_1 et P_2 : la cornée, entre P_2 et P_3 : l'humeur aqueuse, entre P_3 et P_4 : le cristallin, entre P_4 et P_5 : l'humeur vitrée, entre P_5 et P_6 : la rétine.
2. L'humeur vitrée correspond à une longueur $\ell_v = 9,7$ cm sur le document 10, l'indice de l'humeur vitrée : $n_v = 1,344$, le cristallin de longueur LT correspond à une longueur $\ell = 2,6$cm sur l'enregistrement et son indice $n_{ct} = 1,406$.

$$D_v n_v \longleftrightarrow \ell_v \ ; \ LT n_{ct} \longleftrightarrow \ell$$

D'où :

$$LT n_{ct} = \frac{\ell D_v n_v}{\ell_v}$$

Application numérique : on obtient $LT = 4,3$ mm, résultat cohérent.

Partie C- Écoulement sanguin

C-I Écoulement dans un tuyau

1. On calcule la vitesse moyenne sur une section $\mathcal{S}$:

$$V_m = \frac{1}{\pi R^2}\iint_{\mathcal{S}} \vec{v}.\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \int_0^{2\pi} B\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r dr d\theta$$

Soit :

$$V_m = \frac{1}{\pi R^2} B 2\pi \frac{R^2}{4} = \frac{B}{2} \Rightarrow B = 2V_m$$

B représente la vitesse maximale du fluide atteinte en $r = 0$.

2. (a) Pour ce fluide newtonien en écoulement laminaire, on peut écrire en $r = R$:

$$F = \eta \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right| 2\pi R L = \eta B * 2\frac{R}{R^2} 2\pi R L = \eta V_m 8\pi L$$

Le débit volumique vaut :

$$D_v = \iint_{\mathcal{S}} \vec{v}.\overrightarrow{dS} = \pi R^2 V_m \Rightarrow \pi V_m = \frac{D_v}{R^2}$$

Finalement :

$$F = \eta \frac{D_v}{R^2} 8L$$