Corrigé du DS 6 sujet 1

Exercice 1

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Soit $R = \dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$, $\deg R < 0$ donc d'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$R = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}$$

donc : $\frac{1}{(X+1)(X+2)} = a + \frac{bX}{X+1} + \frac{cX}{X+2}$ et par évaluation en 0 : $a = \frac{1}{2}$.

De même, $b = -1$ et $c = \frac{1}{2}$.

Donc :

$$\boxed{R = \frac{1}{2X} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}.}$$

2. On sait que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$, donc $(X = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est le système complet d'événements associé à X et

$$1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = n)$$

Or : $\forall N \in \mathbb{N}^*$ (on passe par des sommes finies pour pouvoir séparer sans problème de convergence)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \mathrm{P}(X = n) &= \frac{\lambda}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{\lambda}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{N+1} - frac1N + 1 - \frac{1}{N+2}\right) \\
&\xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{\lambda}{4}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = n) = \frac{\lambda}{4}.$$

$$\boxed{\lambda = 4.}$$

3. La variable aléatoire X est positive, elle admet donc une espérance dans $[0\,;+\infty]$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathrm{P}(X = n) \\
&= 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\
&= 4\left(\frac{1}{2} - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+2}\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{X \in L^1 \text{ et } \mathrm{E}(X) = 2.}$$

4. La variable aléatoire X^2 est positive, elle admet une espérance dans $[0\,;+\infty]$ et d'après le théorème de transfert :

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n}{(n+1)(n+2)}$$

or $\frac{n}{(n+1)(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ est divergente (c'est la série harmonique).

Donc $\sum n^2\,\mathrm{P}(X = n)$ diverge et

$$\boxed{X \notin L^2 \text{ : la variable aléatoire } X \text{ n'admet pas de variance.}}$$

Exercice 2

Soit $p \in]0,1[$, $q = 1-p$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé et suivant la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = P(Y=k) = pq^k.$$

On considère les variables aléatoires Z et T définies par $Z = \sup(X,Y)$ et $T = \inf(X,Y)$.

1. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$,

1^{er} **cas :** $m < n$, donc $(Z=m) \cap (T=n) \subset (\sup(X,Y) < \inf(X,Y)) = \varnothing$ donc $\mathrm{P}((Z=m) \cap (T=n)) = 0$

$2^{\text{ième}}$ **cas** $m = n$, donc $(Z=m) \cap (T=n) = (Z=n) \cap (T=n) = (X=n) \cap (Y=N)$ et par indépendance des variables aléatoires X et Y : $\mathrm{P}((Z=m) \cap (T=n)) = \mathrm{P}(X=n) \times \mathrm{P}(Y=n) = p^2 q^{2n}$.

$3^{\text{ième}}$ **cas :** $m > n$, donc

$$(Z=m) \cap (T=n) = \big((X=m) \cap (Y=n)\big) \cup \big((X=n) \cap (Y=m)\big)$$

or $\big((X=m) \cap (Y=n)\big)$ et $\big((X=n) \cap (Y=m)\big)$ sont incompatibles (cas $m \neq n$), donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}((Z=m) \cap (T=n)) &= \mathrm{P}\left((X=m) \cap (Y=n)\right) + \mathrm{P}\left((X=n) \cap (Y=m)\right) \\ &= \mathrm{P}(X=m)\,\mathrm{P}(Y=n) + \mathrm{P}(X=n)\,\mathrm{P}(Y=m) \end{aligned}$$

car $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Donc :

$$\boxed{\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \mathrm{P}(Z=m, T=n) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ p^2 q^{2n} & \text{si } m = n \\ 2p^2 q^{n+m} & \text{si } m > n \end{cases}}$$

2. D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements associé à T : pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z=m) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}((Z=m) \cap (T=n)) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} 2p^2 q^{n+m} + p^2 q^{2m} + 0 \\ &= 2pq^m(1-q^m) + p^2 q^m \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{Z(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall m \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(Z=m) = 2pq^m(1-q^m) + p^2 q^m.}$$

Problème : estimations numériques d'intégrales

Objectifs

Le fil conducteur de ce sujet est le calcul approché d'intégrales.

La partie I est indépendante des autres parties. À travers l'exemple de l'intégrale de Gauss, on utilise des suites de fonctions et on « permute limite et intégrale ».

Les parties II et III peuvent être traitées de manière indépendantes. La partie IV utilise les résultats des parties II et III.

Les parties II, III et IV traitent de l'utilisation des polynômes interpolateurs pour le calcul approché d'intégrales : on présente le principe des méthodes de quadrature, dites de Newton-Cotes, ainsi qu'un raffinement avec la méthode de quadrature de Gauss

Le sujet comporte aussi quelques questions notées *Informatique* portant sur le programme « informatique pour tous ». Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage Python.

Notations

— Si f est une fonction réelle bornée sur $[a, b]$ avec $a < b$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

— On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On pourra confondre les expression « polynômes » et « fonctions polynômiales ».

Partie I - « Permutation limite-intégrale » et intégrale de Gauss

On considère l'intégrale de Gauss :

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx.$$

I.1 - Utilisation d'une série entière

Q1. La fonction exp est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $t = -x^2 \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^2 n = e^{-x^2}$$

et la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$ a pour rayon de convergence $+\infty$, donc elle converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0\,;1]$. Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.}$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}.$$

Q2. La suite $\left(\frac{1}{(2k+1)k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et converge vers 0, donc d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}$ converge et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|I - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}\right| \leqslant \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$$

Donc

$$\boxed{|I - s_n| \leqslant \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}}$$

Q3. *Informatique :* écrire une fonction récursive `factorielle` qui prend en argument un entier naturel n et renvoie l'entier $n!$.

```
def factorielle(n):
    if n < 2:
        return 1
    else:
        return n * factorielle(n - 1)
```

Q4. *Informatique :* en déduire un script qui détermine un entier N, tel que $|I - s_N| \leqslant 10^{-6}$.

```
N = 0
while (2*N + 3) * factorielle(N + 1) > 1e6:
    N = N + 1
```

I.2 - Utilisation d'une autre suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n.$$

Q5. Soit $x \in]0\,;+\infty[$, pour tout $n > x$, $1 - \frac{x^2}{n} > 0$ donc $f_n(x) = \exp(n \ln(1 - x^2/n))$
On sait que $\ln(1+t) \underset{t \to 0}{\sim} t$, or $-\frac{x^2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc $\ln(1 - \frac{x^2}{n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{-x^2}{n}$.
Donc $n \ln(1 - \frac{x^2}{n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} -x^2$, donc $n \ln(1 - \frac{x^2}{n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -x^2$. attention à ne pas passer les $\sim$ à l'exponentielle ! Donc par composition de limites, $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-x^2}$.
De plus pour $x = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(0) = 1 = e^{-0^2}$.
Donc

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge simplement vers } x \mapsto e^{-x^2} \text{ sur } [0\,;+\infty[.}$$

Q6. *question supprimée* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant 2$. On sait que : $\forall t \in]-1\,;+\infty[, \ln(1+t) \leqslant t$.
Donc : $\forall x \in [0\,;1], \frac{-x^2}{n} \in]-1\,;0]$, donc $\ln(1 - \frac{x^2}{n}) \leqslant \frac{-x^2}{n}$ et par croissance de la fonction exp, $\forall x \in [0\,;1], 0 \leqslant f_n(x) = \exp(n \ln(1 - \frac{x^2}{n})) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$.
Pour $n = 1$, de même pour tout $x \in [0\,;1[, f_1(x) \leqslant e^{-x^2}$ et $f_1(1) = 0 \leqslant e^{-1^2}$.
Donc

$$\boxed{\forall x \in [0, 1],\ |f_n(x)| \leqslant e^{-x^2}.}$$

De plus, on sait que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $x \mapsto e^{-x^2}$ sur $[0\,;1]$, donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la formule du binôme :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^{2k}}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{(2k+1)n^k} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{I = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}.}$$

Partie II - Notion de polynôme interpolateur

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \cdots, x_n$ dans $[a, b]$, deux à deux distincts.

On appelle polynôme interpolateur de f aux points x_i, un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec f aux points x_i, c'est à dire que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ $P(x_i) = f(x_i)$.

II.1 - Existence du polynôme interpolateur

Pour tout entier i de $[\![0, n]\!]$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$l_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

On pose :

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(X).$$

Q7. Soit $(i, j) \in [\![0\,;n]\!]^2$.
1^{er} **cas :** $i = j$

$$l_i(x_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x_i - x_k}{x_i - x_k} = 1.$$

$2^{\text{ième}}$ **cas :** $i \neq j$.
Pour $k = j$, $\dfrac{x_j - x_k}{x_i - x_k} = 0$ donc :

$$l_i(x_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k} = 0.$$

Donc : $l_i(x_j) = \delta_{i,j}$.
Donc : $\forall j \in [\![0\,;n]\!]$,

$$\begin{aligned} L_n(f)(x_j) &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x_j) \\ &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\delta i,j \\ &= f(x_j) \end{aligned}$$

De plus : $\forall i \in [\![0\,;n]\!], l_i \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $L_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Donc :

$$\boxed{L_n(f) \text{ est un polynôme interpolateur de } f \text{ aux points } x_i}$$

Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes interpolateurs de f aux points x_i, donc : $\forall i \in [\![0\,;n]\!], (P-Q)(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$. Donc $P - Q$ a $n+1$ racines et est de degré inférieur à n, donc $P - Q = 0$, d'où l'unicité.
Conclusion :

$$\boxed{L_n(f) \text{ est l'unique polynôme interpolateur de } f \text{ aux points } x_i.}$$

Un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

II.2 - Calcul effectif du polynôme interpolateur de Lagrange

Q8. *Informatique :* si $y_0, \cdots, y_n$ sont des réels, le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(X)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout i. Écrire en langage Python une fonction `lagrange` qui prend en arguments x une liste de points d'interpolations x_i, y une liste d'ordonnées y_i de même longueur que x, a un réel, et qui renvoie la valeur de P en a.
Par exemple, si `x = [-1, 0, 1]` et `y = [4, 0, 4]`, on montre que $P = 4X^2$ et donc $P(3) = 36$. Ainsi, `lagrange(x, y, 3)` renverra 36.

```python
def lagrange(x, y, a):
    res = 0
    for i in range(n + 1):
        prod = 1
        for k in range(n + 1):
            if k != i:
                prod = prod * (a - x[k]) / (x[i] - x[k])
        res = res + prod
    return res
```

Q9. *question supprimée.*

II.3 - Expression de l'erreur d'interpolation

On suppose, en plus dans cette partie, que f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$. On rappelle que $L_n(f)$ est son unique polynôme interpolateur aux points x_i.

On note $\sigma = \{x_0, \cdots, x_n\}$ l'ensemble des points d'interpolation et π_σ le polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini par :

$$\pi_\sigma = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i)$$

On veut démontrer pour tout réel $x \in [a,b]$, la propriété suivante notée $\mathcal{P}_x$:

$$\exists c_x \in]a,b[, \qquad f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x).$$

Q10. Montrons par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(k)$: si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction p-fois dérivable qui s'annule $p+1$ fois, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi^{(p)}(c) = 0$.

Initialisation pour $p = 1$.
D'après le théorème de Rolle, si φ est dérivable et s'annule 2 fois sur $[a\,;b]$, alors il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. D'où $\mathcal{P}(1)$.

Hérédité soit $p \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{P}(p)$, soit φ une fonction $p+1$ fois dérivable qui s'annule $p+2$ fois sur $[a\,;b]$. On note $a_0, \ldots, a_{p+1} \in [a\,;b]$ tels que $a_0 < a_1 \cdots < a_{p+1}$ et $\forall i \in [\![0\,;p+1]\!], \varphi(a_i) = 0$. Donc pour tout $i \in [\![0\,;p]\!]$, φ est dérivable sur $[a_i\,;a_{i+1}]$ et $\varphi(a_i) = \varphi(a_{i+1})$ donc d'après le théorème de Rolle il existe $b_i \in]a_i\,;a_{i+1}[$ tel que $\varphi'(b_i) = 0$. Donc φ' est p fois dérivable et s'annule $p+1$ fois sur $[a\,;b]$ (en b_i pour chaque $i \in [\![0\,;p]\!]$) et par hypothèse de récurrence appliquée à φ' il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $\varphi^{(n+1)}(c) = \varphi'^{(p)}(c) = 0$. D'où $\mathcal{P}(p+1)$.

Conclusion par principe de récurrence :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \text{ si } \varphi : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ est une fonction } p\text{-fois dérivable qui} \\ \text{s'annule } p+1 \text{ fois, alors il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } \varphi^{(p)}(c) = 0.\end{array}}$$

Q11. Soit $x \in \sigma$, donc par définition de $L_n(f)$, $L_n(f)(x) = f(x)$ et x est une racine de π_σ. Donc quel que soit $c_x \in]a\,;b[$, $f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} = 0$.
Donc :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \sigma, \text{ la propriété } \mathcal{P}_x \text{ est vraie.}}$$

On fixe x un réel de $[a,b]$ qui n'est pas dans σ. Soit λ un réel. On définit sur $[a,b]$ une application F par :

$$F(t) = f(t) - L_n(f)(t) - \lambda\pi_\sigma(t)$$

Q12. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(x) = 0 &\Leftrightarrow f(x) - L_n(f)(x) - \lambda \pi_\sigma(x) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{f(x) - L_n(f)(x)}{\pi_\sigma(x)} \end{aligned}$$

les racines de π_σ sont les éléments de σ or $x \notin \sigma$, donc $\pi_\sigma(x) \neq 0$.
Donc :

$$\boxed{\text{Pour } \lambda = \tfrac{f(x)-L_n(f)(x)}{\pi_\sigma(x)}, \text{ on a } F(x) = 0.}$$

Q13. On sait que $\forall i \in [\![, ; f]\!](x_i) = L_n(f)(x_i)$ et $\pi_\sigma(x_i) = 0$ car $x_i \in \sigma$ et σ est l'ensemble des racines de π_σ. Donc : $\forall i \in [\![0 ; n]\!], F(x_i) = 0$ et d'après le choix de λ, $F(x) = 0$ et les x_i sont deux à deux distincts et $x \notin \sigma$. Donc :

$$\boxed{F \text{ s'annule } n+2 \text{ fois.}}$$

De plus $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a ; b])$, donc d'après la question Q10, il existe $c_x \in \,]a ; b[$ tel que $F^{(n+1)}(c_x) = 0$. Or $L_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $L_n(f)^{(n+1)} = 0$ et π_σ est un polynôme unitaire de degré $n+1$ donc $\pi_\sigma^{(n+1)} = (n+1)!$ d'où :

$$0 = F^{(n+1)}(c_x) = f^{(n+1)}(c_x) - 0 - \lambda \times (n+1)!$$

donc : $\lambda = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$.
Donc :

$$F(x) = 0 = f(x) - L_n(f)(x) - \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x) = 0$$

donc :

$$f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x)$$

Donc :

$$\boxed{\mathcal{P}(x) \text{ est vraie.}}$$

Q14. $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a ; b])$, donc $f^{(n+1)} \in \mathcal{C}([a ; b])$ et $[a ; b]$ est un segment (donc compact) de $\mathbb{R}$. Donc, d'après le théorème des bornes atteintes,

$$\boxed{f^{(n+1)} \text{ est bornée sur } [a ; b].}$$

Soit $x \in [a ; b]$, on sait que $\mathcal{P}(x)$ est vraie dans tous les cas, donc il existe $c_x \in [a ; b]$ tel que

$$f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x)$$

donc

$$\begin{aligned} |f(x) - L_n(f)(x)| &= \frac{\left|f^{(n+1)}(c_x)\right|}{(n+1)!}|\pi_\sigma(x)| \\ &\leqslant \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}|x - x_i| \\ &\leqslant \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}|b - a| \\ &\leqslant \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{pour } K = b - a, \\[1em] \|f - L_n(f)\|_\infty \leqslant \dfrac{K^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty\end{array}}$$

Q15. La fonction sin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0 ; 2\pi]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}, \sin^{(n)} \in \{\sin, \cos, -\sin, -\cos\}$ donc $\left\|\sin^{(n+1)}\right\|_\infty = 1$. Donc d'après la question précédente :

$$\|\sin - L_n(\sin)\|_\infty \leqslant \frac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

d'après le théorème des croissances comparées. Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{si } f \text{ est la fonction sinus, la suite } (L_n(f))_{n \in N} \text{ converge uniformément} \\ \text{vers } f \text{ sur } [0, 2\pi].\end{array}}$$

Q16. Par développement en série entière usuel :

$$\forall x \in \,]-1 ; 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!$. Donc :

$$\boxed{\left\|f^{(2k)}\right\|_\infty \geqslant \left|f^{(2k)}(0)\right| = (2n)!.}$$

On définit f sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Démontrer à l'aide d'une série entière que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|f^{(2k)}\|_\infty \geqslant (2k)!.$$

Cette dernière inégalité montre que la quantité $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ peut être grande et cela peut empêcher parfois la convergence de la suite de polynômes interpolateurs. Ceci est appelé le phénomène de Runge.

Partie III - Famille de polynômes orthogonaux

On munit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels du produit scalaire $\langle . \, , \, . \rangle$ défini par :

pour tout polynôme P et Q de $\mathbb{R}|X]$:

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$

On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2, \cdots)$ de $\mathbb{R}|X]$. On obtient donc une famille orthonormée de polynômes $(P_0, P_1, P_2, \cdots)$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{Vect}\{1, X, \cdots, X^k\} = \mathrm{Vect}\{P_0, P_1, \cdots, P_k\}.$$

Le polynôme P_n s'appelle le polynôme de Legendre d'indice n.

Q17. D'après l'algorithme de Gram-Schmidt, $P_0 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ car

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \, \mathrm{d}t = 1.$$

De plus : $\langle 1, X\rangle = \int_{-1}^{1} t \, \mathrm{d}t = 0$ donc $1 \perp X$, donc : $P_1 = \frac{X}{\|X\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} X$.

$$\boxed{P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } P_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} X.}$$

Q18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après l'algorithme de Gram-Schmidt, $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille orthonormée, donc P_n est orthogonale à $\mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_{n-1})$ et de plus $\mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_{n-1}) = \mathrm{Vect}(1, \ldots, X^{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Donc :

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1, \text{ le polynôme } P_n \text{ est orthogonal à } R_{n-1}[X].}$$

On sait que $P_n \in \mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^n) = \mathbb{R}_n[X]$, donc $\deg(P_n) \leqslant n$, supposons par l'absurde $\deg(P_n) < n$, donc $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, or P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $P_n = 0$, mais P_n est normé, d'où la contradiction.

$$\boxed{\text{le polynôme } P_n \text{ est de degré } n.}$$

On prend $n \geqslant 1$. On veut démontrer que P_n admet n racines simples dans $[-1, 1]$.

Q19.

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} P_n(t) \times 1 \, \mathrm{d}t = \langle P_n, 1\rangle = 0$$

car P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $1 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Supposons par l'absurde que P_n n'admet pas de racine dans $[-1\,;1]$, or P_n est polynomiale donc continue sur $[-1\,;1]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, P_n ne change pas de signe sur $[-1\,;1]$ et d'après le théorème de positivité améliorée de l'intégrale, P_n est nulle sur $[-1\,;1]$, d'où la contradiction.

Donc

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_n(t)\, dt = 0 \text{ et } P_n \text{ admet au moins une racine dans } [-1, 1].}$$

Supposons par l'absurde que P_n admet strictement moins de n racines simples. Si P_n admet des racines $t_1, \cdots, t_p$ de multiplicité impaire avec $p < n$, on pose $Q = (X - t_1) \cdots (X - t_p)$; sinon, on pose $Q = 1$. On considère enfin le polynôme $H = QP_n$.

Q20. On sait que $\deg P_n = n$ donc P_n a au plus n racines avec multiplicité, donc le nombre de racines distinctes est inférieur à n avec égalité si et seulement si toutes les racines sont simples. Or on a supposé que P_n admet strictement moins de n racines simples, donc P_n admet strictement moins de n racines distinctes. En particulier, p le nombre de racines de multiplicité impaire est strictement inférieur à n donc $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Et comme P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on en déduit que :

$$\boxed{\int_{-1}^{1} H(t)\, \mathrm{d}t = \langle P_n, Q\rangle = 0.}$$

De plus les racines de H sont les racines de P_n et si α est une racine de P_n de multiplicité m, alors α est une racine de multiplicité m si m est pair et $m+1$ si m est impair par construction de H. Donc toutes les racines de H sont de multiplicité pair. Donc la décomposition en produit d'irréductibles de H est de la forme

$$H = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{2\beta_k} \prod_{j=1}^{q} (X^2 + a_j X + b_j)$$

donc H est du signe de λ sur $[-1\,;1]$, H est continue sur $[-1\,;1]$ et $\int_{-1} 1 H(t)\, \mathrm{d}t = 0$, donc par positivité améliorée de l'intégrale H est nulle sur $[-1\,;1]$. Donc H a une infinité de racines, donc $H = 0$ et $H = P_n Q$ avec $Q \neq 0$ donc $P_n = 0$ d'où la contradiction.

Donc :

$\boxed{P_n \text{ a } n \text{ racines simples.}}$

on pouvait ne prendre que les t_i qui sont dans $[-1\,;1]$ et de multiplicité impaire, on montrerait ainsi que P_n a n racines simples toutes dans l'intervalle $[-1\,;1]$ car si $\alpha \notin [-1\,;1]$, alors $(X-\alpha)$ est de signe constant sur $[-1\,;1]$.

Partie IV - Méthodes de quadrature

Dans cette partie, nous allons voir comment les polynômes interpolateurs de Lagrange peuvent être utilisés pour estimer $\int_a^b f(x)\,dx$ pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Pour cela, on choisit d'abord une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ de l'intervalle $[a,b]$. À cause du phénomène de Runge, si N est grand, le polynôme interpolateur de f aux points x_i n'est pas forcément une bonne approximation de f. Approximer $\int_a^b f(x)\,dx$ par $\int_a^b L_N(f)(x)\,dx$ n'est donc pas forcément pertinent...

Nous allons en fait approximer f par un polynôme d'interpolation sur chaque petit intervalle $[x_k, x_{k+1}]$.

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx.$$

Q21. On effectue le changement de variable affine $x = x_k + (t+1)\frac{x_{k+1}-x_k}{2}$ ($\mathrm{d}x = \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\,\mathrm{d}t$) donc :

$$\int_{-1}^{1} f\left(x_k + (t+1)\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\,\mathrm{d}t = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$$

avec

$$g(t) = f\left(x_k + (t+1)\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right).$$

On est donc ramené à estimer $\int_{-1}^1 g(t)\,dt$ où $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

On se donne $n+1$ points $t_0, t_1, \cdots, t_n$ dans $[-1,1]$, deux à deux distincts.

On rappelle que $L_n(g) = \sum_{i=0}^{n} g(t_i)l_i(X)$ est le polynôme interpolateur de g aux points t_i et on pose :

$$J(g) = \int_{-1}^{1} L_n(g)(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i g(t_i) \text{ avec } \alpha_i = \int_{-1}^{1} l_i(t)\,dt.$$

Lorsqu'on approxime $\int_{-1}^1 g(t)\,dt$ par $J(g)$, c'est-à-dire :

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \approx \sum_{i=0}^{n}\alpha_i g(t_i),$$

on dit que J est une méthode de quadrature associée aux points $t_0, \cdots, t_n$ et aux poids $\alpha_0, \cdots, \alpha_n$.

Q22. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors P est un polynôme interpolateur de P aux points x_i, donc par unicité d'un tel polynôme, $L_n(P) = P$ d'où :

$$J(P) = \int_{-1}^{1} L_n(P)(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc :

$\boxed{\text{pour tout polynôme } P \in \mathbb{R}_n[X], \text{ on a } J(P) = \int_{-1}^1 P(t)\,dt.}$

On dit que la méthode de quadrature J est d'ordre au moins n car la formule approchée est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Q23. Exemple : on prend $n=1$, $t_0 = -1$ et $t_1 = 1$. Déterminer α_0 et α_1.
Donc $l_0(X) = \frac{1}{(-1)-1}(X-1) = frac{-}12(X-1)$ et $\alpha_0 = \frac{-1}{2}\int_{-1}^1 t-1\,\mathrm{d}t = 1$ et $l_1(X) = \frac{1}{1-(-1)}(X-(-1)) = frac12(X+1)$ et $\alpha_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 t+1\,\mathrm{d}t = 1$.
Ainsi $J(g) = g(-1) + g(1) = f(x_k) + f(x_{k+1})$.
On trace une courbe d'une fonction positive et continue, l'approximation de g par $L_1(g)$ est l'interpolation affine aux points (-1) et 1 ce qui revient à approcher l'aire sous la courbe par l'air d'un trapèze.

Quadrature de Gauss

Dans les deux questions suivantes, on prend pour points d'interpolation $t_0, t_1, \cdots, t_n$ les $(n+1)$ racines du polynôme de Legendre P_{n+1} introduit dans la partie III.

Nous allons démontrer que, dans ce cas, la formule de quadrature J est d'ordre au moins $2n+1$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. On fait la division euclidienne de P par P_{n+1}, on note respectivement Q le quotient et R le reste de cette division :

$$P = QP_{n+1} + R.$$

Q24.

$$J(QP_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Q(t_i) \times P_{n+1}(t_i) = 0$$

car les t_i sont les racines de P_{n+1}. Et P_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$ or $\deg(QP_{n+1}) = \deg(P - R) \leqslant \max(\deg P, \deg R) \leqslant 2n+1$ et $\deg P_{n+1} = n+1$ donc $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc

$$\int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \langle Q, P\rangle = 0.$$

Donc :

$$\boxed{J(QP_{n+1}) = \int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

De plus d'après la question Q22, comme par division euclidienne $\deg R \leqslant n$, $J(R) = \int_{-1}^{1} R(t)\,\mathrm{d}t$ et

$$J : g \mapsto \sum_{i=0}^{n} \alpha_i g(t_i)$$

est linéaire par linéarité des fonctions d'évaluation,

$$J(P) = J(QP_{n+1}) + J(R) = \int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} R(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc :

$$\boxed{J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,dt.}$$

Q25. Soit $i \in [\![0\,;n]\!]$ et $P = l_i^2$, donc $\deg P = 2n$ et d'après la question précédente :

$$J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or P est positive sur $[-1\,;1]$ et non identiquement nulle donc

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

et

$$J(P) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j l_i(t_j)^2 = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \delta_{i,j} = \alpha_i$$

Donc :

$\boxed{\text{les poids } \alpha_0, \cdots, \alpha_n \text{ associés à la quadrature de Gauss sont strictement positifs.}}$

De plus en posant $Q = 1$, on a $\deg Q \leqslant 2n+1$ donc :

$$J(Q) = \int_{-1} 1Q(t)\,\mathrm{d}t = 2$$

et

$$J(Q) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Q(t_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i$$

Donc :

$\boxed{\text{la sommes des poinds est 2.}}$

FIN