CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC 2022
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2 MP

m.laamoum@gmail.com

I Inégalités d'interpolation des dérivées

Si $(E, \|.\|)$ un e.v.n on rappelle les inégalités triangulaires , pour tout x,y dans E :

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{et} \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$$

I. A *Cas particulier* $K = 1$

Q 1. Soit $x_1 \in [0,1]$ et $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$, donc f et f' sont bornées sur $[0,1]$. Soit $x \in [0,1]$ d'après le TAF il existe $c \in [0,1]$ tel que

$$|f(x) - f(x_1)| = |x - x_1| \ |f'(c)|$$

par suite

$$|f(x)| - |f(x_1)| \leq |f'(c)| \leq \|f'\|_\infty \quad \text{c.a.d} \quad |f(x)| \leq \|f'\|_\infty + |f(x_1)|$$

ceci est valable pour tout x dans $[0,1]$ donc $\|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + |f(x_1)|$.

Q 2. Soit $C \in]0,1[$ et une fonction constante $f = a$ avec $a > 0$.

On a $\|f\|_\infty = a$ et $\|f'\|_\infty = 0$. Si f vérifie (I.2) alors $1 \leq C$, ce qui est absurde . Donc l'inégalité (I.2) est fausse.

I. B *Cas particulier* $K = 2$

On fixe deux réels distincts $x_1 < x_2$ de $[0,1]$.

Q 3. Soit $x \in [0,1]$ et $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, par le le TAF il existe $c_1 \in [0,1]$ tel que

$$\left| f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = |f'(x) - f'(c_1)|$$

le TAF , encore une autre fois, appliqué à f' donne : $\exists c_2 \in [0,1]$ tel que

$$|f'(x) - f'(c_1)| = |x - c_1| \ |f''(c_2)|.$$

$f \in \mathcal{C}^2([0,1])$ donc f'' est bornée sur $[0,1]$, on en déduit

$$\left| f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = |f'(x) - f'(c_1)| \leq \|f''\|_\infty$$

Q 4. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, l'inégalité précédente donne

$$|f'(x)| \leq \left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| + \|f''\|_\infty \leq \|f''\|_\infty + \frac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}$$

ceci est valable pour tout x dans $[0,1]$ donc

$$\|f'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + \frac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}$$

Q 5. D'après Q1

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &\leqslant \|f'\|_\infty + |f(x_1)| \\
&\leqslant \|f''\|_\infty + |f(x_1)| + \frac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1} \\
&\leq \|f''\|_\infty + \left(1 + \frac{1}{x_2 - x_1}\right)(|f(x_1)| + |f(x_2)|)
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité (I.3) avec $C = 1 + \frac{1}{x_2 - x_1}$.

I. C Cas général par interpolation de Lagrange

Soit $K \in \mathbb{N}^*$

Q 6. Ψ est linéaire et $\dim \mathbb{R}_{K-1}[X] = \dim \mathbb{R}^K$ il suffit de montrer que Ψ est injective .

Soit P dans le noyau de Ψ alors il a K racines distincts et il est de degré inférieur à $K-1$ donc il est nul , d'où $\ker \Psi = \{0\}$, ainsi Ψ est un isomorphisme .

Q 7. Soit L_i le polynômes de $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ l'image réciproque par Ψ de $(\delta_{i,1}, ..., \delta_{i,K})$, $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker .

Soit $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$, le polynôme $P = \sum\limits_{j=1}^{K} f(x_j)\ L_j$ vérifie

$$\forall \ell \in [\![1, K]\!], \quad P(x_\ell) = f(x_\ell).$$

($(L_i)_{1 \leq i \leq K}$ est appelé la base de Lagrange de $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ et $L_i(X) = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$)

Q 8. $f - P$ s'annule, sur $[0,1]$, au moins K fois en x_1 , ..., x_K , le théorème de Rolle, appliqué sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, donne $f' - P'$ s'annule, sur $[0,1]$, au moins $K-1$ fois , ainsi par récurrence pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule, sur $[0,1]$, au moins $K-k$ fois .

Q 9. Soit $k \in [\![0, K-1]\!]$ et $y \in [0,1]$ une racine de $f^{(k)} - P^{(k)}$, comme dans Q1 on a

$$\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\right\|_\infty + \left|f^{(k)}(y) - P^{(k)}(y)\right| = \left\|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\right\|_\infty$$

Q 10. On déduit de la question Q9 que, pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, $\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)} - P^{(K)}\right\|_\infty$, ce qui donne

$$\left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|P^{(k)}\right\|_\infty + \left\|P^{(K)}\right\|_\infty + \left\|f^{(K)}\right\|_\infty$$

Nous avons $P=\sum\limits_{j=1}^{K} f\left(x_j\right) L_j$ et les L_j sont dans $\mathcal{C}^K([0,1])$, donc

$$\left\|P^{(k)}\right\|_{\infty} \leq \sum_{j=1}^{K}\left|f\left(x_j\right)\right|\left\|L_j^{(k)}\right\|_{\infty} \leq \max_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 1 \leq j \leq K}}\left\|L_j^{(k)}\right\|_{\infty} \sum_{j=1}^{K}\left|f\left(x_j\right)\right|$$

On obtient l'inégalité d'interpolation (I.1) avec $C=2 \max_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 1 \leq j \leq K}}\left\|L_j^{(k)}\right\|_{\infty}$.

II Dérivation $\mathcal{C}^K$ pour les séries de fonctions .

II. A Énonce général

Q 11. $[a, b]=[0,1]$.

Soit $x \in[0,1]$ on a

$$\max _{0 \leqslant k \leqslant K-1}\left\|f_n^{(k)}\right\|_{\infty} \leqslant\left\|f_n^{(K)}\right\|_{\infty}+C \sum_{\ell=1}^{K}\left|f_n\left(x_{\ell}\right)\right| .$$

donc pour tout $k \in \llbracket 1, K-1 \rrbracket$ la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[0,1]$.

Q 12. Soit $g_n=f_n \circ \sigma$ où $\sigma:[0,1] \rightarrow[a, b]$ avec $\sigma(t)=(1-t) a+t b$.

g_n de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[0,1]$ et $g_n^{(K)}(t)=(b-a)^K f_n^{(K)}(\sigma(t))$ donc

$$\left\|g_n^{(K)}\right\|_{\infty,[0,1]}=(b-a)^K\left\|f_n^{(K)}\right\|_{\infty,[a, b]}$$

Pour tout $\ell \in \llbracket 1, K \rrbracket$ la série numérique $\sum g_n\left(\sigma^{-1}\left(x_{\ell}\right)\right)$ est absolument convergente.

$\left(g_n\right)$ vérifie H1 et H2 sur $[0,1]$ donc pour tout $k \in \llbracket 1, K-1 \rrbracket$ la série $\sum g_n^{(k)}$ converge normalement sur $[0,1]$ par suite $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, b]$.

D'après le résultat de la question précédente, on peut poser $F_k(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$ pour tout $x \in[a, b]$.

Q 13. La série $\sum f_n$ vérifie les conditions du théorème de dérivabilité, d'ordre K, des séries de fonctions sur un segment, donc F_0 est de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[a, b]$ et que $F_0^{(k)}=F_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$.

II. B Application sur un exemple

Q 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $x \mapsto(-1)^n 2^{-n x^2}$ est continue , les solutions de l'équation

$$\forall x>0 \quad y^{\prime \prime}(x)=(-1)^n 2^{-n x^2}$$

sont données par

$$y(x)=(-1)^n \int_1^x\left(\int_1^t 2^{-n s^2} d s\right) d t+a(x-1)+b$$

il existe une unique solution, notée f_n, vérifiant $y(1)=0$, $y(2)=0$, obtenue pour $b=0$ et $a=(-1)^{n+1} \int_1^2\left(\int_1^t 2^{-n s^2} d s\right) d t$.

Q 15. Soit $[a, b] \subset] 0,+\infty[$, $A=\min (1, a)$ et $B=\max (2, b)$. $g_n=f_n \circ \sigma$ où $\sigma:[0,1] \rightarrow[A, B]$ avec

$\sigma(t) = (1-t)A + tB$.

L'inégalité (I.1) appliquée à g_n , sur $[0,1]$, avec $K=2,\ x_1 = \sigma^{-1}(1)$ et $x_2 = \sigma^{-1}(2)$ donne

$$\max_{0\leqslant k\leqslant 1} \left\| g_n^{(k)} \right\|_{\infty,[0,1]} \leq \left\| g_n^{(K)} \right\|_{\infty,[0,1]} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_{\infty,[A,B]} \leq (B-A)^2 \|f_n''\|_{\infty,[A,B]} = (B-A)^2\, 2^{-nA^2}$$

Puisque $[a,b] \subset [A,B]$ alors

$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq (B-A)^2\, 2^{-nA^2}$$

De plus $2^{-nA^2} \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{n^2})$, donc $\sum f_n(x)$ converge normalement sur $[a,b]$.

La question Q13 assure que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$ donc elle est sur $]0,+\infty[$.

Q 16. $F''(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n 2^{-nx^2} = \dfrac{-1}{2^{x^2}+1}$.

Q 17. F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[1,2]$, $F(1) = F(2) = 0$, l'inégalité I.1 au points $a=1$ et $b=2$ donne

$$\|F\|_{\infty,[1,2]} \leq (b-a)^2 \|F''\|_{\infty,[1,2]} = \|F''\|_{\infty,[1,2]}$$

Or $|F''(x)| = \frac{1}{2^{x^2}+1} \leqslant \frac{1}{3}$ pour tout $x \in [1,2]$ donc $\|F\|_{\infty,[1,2]} \leq \frac{1}{3}$.

III Convergence d'une série aléatoire de Rademacher

$(X_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$$

Cela ne signifie pas que $X_n(\Omega) = \{-1,1\}$, mais $\mathbb{P}(X_n(\Omega) \setminus \{-1,1\}) = 0$.

III. A Construction de la suite $(\phi(j))_{j\in\mathbb{N}}$ et majoration de $\mathbb{P}(A_j)$

Q 18. $\sum a_n^2$ converge donc $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k^2 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et pour tout $k \geq 0$ il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $\sum\limits_{n>n_k}^{+\infty} a_n^2 \leqslant \dfrac{1}{8^k}$.

Soit $\phi : k \mapsto \max\{n_0, ..., n_k\}$, la suite $(\phi(j))_{j\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et vérifie

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n>\phi(j)}^{+\infty} a_n^2 \leqslant \frac{1}{8^j}$$

Q 19. On a $S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)} = \sum\limits_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} X_n a_n$, donc

$$\mathbb{E}\left(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}\right) = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} a_n \mathbb{E}(X_n)$$

comme $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$ alors $\mathbb{P}(X_n = x) = 0$ si $x \notin \{-1,1\}$, ainsi $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et

$$\mathbb{E}\left(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}\right) = 0.$$

Les variables X_n sont indépendantes donc

$$\mathbb{V}\left(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}\right) = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} a_n^2 \mathbb{V}(X_n)$$

avec $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) = 1$, d'où

$$\mathbb{V}\left(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}\right) = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} a_n^2$$

Q 20. L'inégalité de Bienaymé-Tchebichev donne

$$\mathbb{P}(A_j) = \mathbb{P}\left(\left|S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)} - \mathbb{E}\left(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}\right)\right| > 2^{-j}\right) \leq \frac{\mathbb{V}\left(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}\right)}{2^{-2j}}$$

et on a $\mathbb{V}\left(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}\right) \leq \sum\limits_{n=\phi(j)+1}^{+\infty} a_n^2 \leq \frac{1}{8^j}$ donc

$$\mathbb{P}(A_j) \leq \frac{8^{-j}}{2^{-2j}} = 2^{-j}$$

III. B Inégalité maximale de Lévy $\mathbb{P}(B_j) \leqslant 2\mathbb{P}(A_j)$

Q 21. Soit $m, m' \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$ et $m > m'$

Si $\omega \in B_{j,m}$ alors $\left|S_m(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right| > 2^{-j}$ et $\forall n \in [\![\phi(j), m-1]\!]$, $\left|S_n(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right| \leqslant 2^{-j}$, en particulier pour $n = m'$ donc $\omega \notin B_{j,m'}$ ainsi $B_{j,m} \cap B_{j,m'} = \emptyset$.

Soit $\omega \in B_{j,m}$, $\max\limits_{\phi(j)+1 \leq n \leq \phi(j+1)} \left|S_n - S_{\phi(j)}\right| \geq \left|S_m(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right| > 2^{-j}$ donc $\omega \in B_j$ et $B_{j,m} \subset B_j$ ainsi

$$\bigcup_{\phi(j)<m\leq\phi(j+1)} B_{j,m} \subset B_j.$$

Soit $\omega \in B_j$ et $m_0 = \min\left\{n \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!] \text{ tel que } \left|S_n(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right| > 2^{-j}\right\}$ alors $\omega \in B_{j,m_0}$ ce qui donne $B_j \subset \bigcup\limits_{\phi(j)<m\leq\phi(j+1)} B_{j,m}$. Finalement on a l'égalité

$$B_j = \bigcup_{\phi(j)<m\leq\phi(j+1)} B_{j,m}$$

Q 22. Nous avons

$$A_j \cap B_j = \bigcup_{\phi(j)<m\leq\phi(j+1)} A_j \cap B_{j,m}$$

qui est une réunion disjointe donc $\mathbb{P}(A_j \cap B_j) = \sum\limits_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \mathbb{P}(A_j \cap B_{j,m})$.

De plus $A_j \subset B_j$ donc

$$\mathbb{P}(A_j) = \sum_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \mathbb{P}(A_j \cap B_{j,m})$$

Q 23. Notons Φ cette fonction. Posons $N = \phi(j+1) - \phi(j)$ et, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, Z_α est l'ensemble des $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_N) \in \{-1, 1\}^N$ vérifiant :

$$\begin{cases} \left|\varepsilon_m a_m + ... + \varepsilon_{\phi(j)+1} a_{\phi(j)+1}\right| > 2^{-j} \quad , \forall n \in [\![\phi(j), m-1]\!], \quad \left|\varepsilon_n a_n + ... + \varepsilon_{\phi(j)+1} a_{\phi(j)+1}\right| \leqslant 2^{-j} \\ \text{et } \left|\alpha(\varepsilon_{m+1} a_{m+1} + ... + \varepsilon_{\phi(j+1)} a_{\phi(j+1)}) + \varepsilon_m a_m + ... + \varepsilon_{\phi(j)+1} a_{\phi(j)+1}\right| > 2^{-j} \end{cases}$$

Donc on a

$$\left\{\left|\alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap B_{j,m} = \bigcup_{(\varepsilon_1, .., \varepsilon_N) \in Z_\alpha} [X_1 = \varepsilon_1, ..., X_N = \varepsilon_N] \quad \text{(réunion disjointe)}$$

l'independance des X_n donne

$$\mathbb{P}(\left\{\left|\alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap B_{j,m}) = \frac{Card(Z_\alpha)}{2^N}$$

donc $\Phi(\alpha) = Card(Z_\alpha) \in \mathbb{N}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application de Z_α vers $Z_{-\alpha}$ qui a $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_N)$ associe $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_m, -\varepsilon_{m+1}, .., -\varepsilon_N)$, est une bijection donc $\Phi(-\alpha) = \Phi(\alpha)$ et Φ est paire. *Ceci pour ceux qui ont compris la question comme ça. Pour les autres on remarque que :* si $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_N) \in Z_\alpha$ alors $(-\varepsilon_1, .., -\varepsilon_N) \in Z_\alpha$ donc $\Phi(\alpha)$ est un nombre pair .

Q 24. L'événement $B_j = \bigcup_{\phi(j) < m \leq \phi(j+1)} B_{j,m}$ se réalise, c.a.d $B_j \neq \emptyset$, alors il existe

Soit $\omega \in B_j$ il existe $m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$ (m depend de ω) tel que $\omega \in B_{j,m}$, donc $\left|S_m(\omega) - S_{\phi(j)(\omega)}\right| > 2^{-j}$, écrivons

$$S_m - S_{\phi(j)} = \frac{1}{2}\left(S_{\phi(j+1)} - S_m + S_m - S_{\phi(j)}\right) + \frac{1}{2}\left(-S_{\phi(j+1)} + S_m + S_m - S_{\phi(j)}\right)$$

si on suppose

$$\left|\left(S_{\phi(j+1)} - S_m + S_m - S_{\phi(j)}\right)(\omega)\right| \leq 2^{-j} \text{ et } \left|\left(-S_{\phi(j+1)} + S_m + S_m - S_{\phi(j)}\right)(\omega)\right| \leq 2^{-j}$$

alors $\left|S_m(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right| \leq 2^{-j}$ ce qui est absurde . Ainsi

$$\omega \in \left\{\left|\alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap B_{j,m}$$

et l'événement se réalise pour $\alpha \in \{-1, +1\}$.

Q 25. Si B_j n'est pas réalisé l'inégalité est évidente.

Supposons B_j est réalisé. Pour tout $m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$ on note

$$\begin{aligned} R_{j,m} &= \bigcup_{\alpha \in \{-1,+1\}} \left(\left\{\left|\alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap B_{j,m}\right) \\ &= (A_j \cap B_{j,m}) \cup (E_{j,m} \cap B_{j,m}) \qquad (*) \end{aligned}$$

et $E_{j,m} = \left[\left| -S_{\phi(j+1)} + S_m + S_m - S_{\phi(j)} \right| > 2^{-j} \right]$.
Nous avons d'après Q24 $B_j \subset \bigcup\limits_{m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]} R_{j,m}$ donc

$$\mathbb{P}(B_j) \leq \sum_{m\ = \varphi(j)\ +1}^{\varphi(j+1)} \mathbb{P}(R_{j,m})$$

de la relation (*) on a

$$\sum_{m\ = \varphi(j)\ +1}^{\varphi(j+1)} \mathbb{P}(R_{j,m}) \leq \sum_{m\ = \varphi(j)\ +1}^{\varphi(j+1)} \mathbb{P}(A_j \cap B_{j,m}) + \sum_{m\ = \varphi(j)\ +1}^{\varphi(j+1)} \mathbb{P}\left(E_{j,m} \cap B_{j,m}\right).$$

La fonction Φ du Q23 est paire donc $\mathbb{P}(A_j \cap B_{j,m}) = \mathbb{P}\left(E_{j,m} \cap B_{j,m}\right)$, par suite

$$\begin{aligned} \sum_{m\ = \varphi(j)\ +1}^{\varphi(j+1)} \mathbb{P}(R_{j,m}) &\leq 2 \sum_{m\ = \varphi(j)\ +1}^{\varphi(j+1)} \mathbb{P}(A_j \cap B_{j,m}) \\ &\leq 2\mathbb{P}\left(A_j\right) \end{aligned}$$

ainsi

$$\mathbb{P}\left(B_j\right) \leqslant 2\mathbb{P}\left(A_j\right)$$

III. C Convergence de la série aléatoire $\sum X_n a_n$

Q 26. Soit $B = \bigcap\limits_{J \in \mathbb{N}} \bigcup\limits_{j \geq J} B_j$. La suite d'événements $\left(\bigcup\limits_{j \geq J} B_j \right)_{J \in \mathbb{N}}$ est décroissante , le théorème de la limite monotone donne

$$\mathbb{P}\left(B\right) = \lim_{J \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j \geq J} B_j \right)$$

On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j \geq J} B_j \right) \leq \sum_{j=J}^{+\infty} \mathbb{P}\left(B_j\right)$$

et $\mathbb{P}\left(B_j\right) \leqslant 2\mathbb{P}\left(A_j\right) \leq \dfrac{1}{2^{j-1}}$, donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j \geq J} B_j \right) \leq \sum_{j=J}^{+\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = \frac{1}{2^{J-2}}$$

d'où

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{J \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j \geq J} B_j \right) = 0.$$

Q 27. l'événement considéré se traduit simplement par :

$$\left\{ \exists J \in \mathbb{N}, \quad \bigcap_{j \geq J} \overline{B_j} \text{ est réalisé} \right\} = \left\{ \bigcup_{J \geq 1} \bigcap_{j \geq J} \overline{B_j} \text{ est réalisé} \right\} = \left\{ \overline{B} \text{ est réalisé} \right\}$$

donc il se réalise avec probabilité 1 .

Q 28. Soit $\omega \in \overline{B}$ alors $\exists J \in \mathbb{N} \;\; \forall j \geqslant J, \left|S_{\phi(j+1)}(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right| \leq 2^{-j}$.

Ainsi la série $\sum S_{\phi(j+1)}(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)$ converge absolument donc elle converge (télescopique), par suite $\left(S_{\phi(j)}(\omega)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ est convergente .

En déduit que

$$\overline{B} \subset \left\{\text{la suite } \left(S_{\phi(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\right\}$$

ainsi ce dernier événement à une probabilité 1.

Q 29. Soit $\omega \in \overline{B}$ alors $\exists J \in \mathbb{N} \;\; \forall j \geqslant J, \left|S_{\phi(j+1)}(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right| \leq 2^{-j}$ par suite $\left(S_{\phi(j)}(\omega)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Pour tout $N > \phi(J)$, il existe $j \geqslant J$ tel que $N \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$, on a

$$S_N(\omega) = S_{\phi(j)}(\omega) + \left(S_N(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right) \quad \text{avec } \left|S_N(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right| \leqslant 2^{-j}$$

donc $(S_N(\omega))_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente , d'où

$$\overline{B} \subset \left\{\text{la série } \sum X_n a_n \text{ est convergente}\right\}$$

et $\{$la série $\sum X_n a_n$ est convergente$\}$ a une probabilité 1.

IV Dérivation $\mathcal{C}^K$ pour des séries aléatoires de fonctions

On fixe $K \in \mathbb{N}^*$.

Q 30. $\ell \in [\![1, K]\!]$.

Si $\sum |f_n(x_\ell)|$ converge alors $|f_n(x_\ell)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et il existe N tel que si $n \geq N$ alors $|f_n(x_\ell)| < 1$, ce qui donne $f_n(x_\ell)^2 \leq |f_n(x_\ell)|$, la convergence de $\sum f_n(x_\ell)^2$ en découle. Donc (H 2) implique (H 2') .

Q 31. Pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$ $\sum f_n(x_\ell)^2$ converge , la question Q29 donne le résultat .

Q 32. Notons A l'événement considéré dans cette question.

On note $P_n \in \mathbb{R}_{K-1}[X]$ un polynôme vérifiant $P_n(x_\ell) = f_n(x_\ell)$ pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$

D'près la question Q 9 **,** $\left\|f_n^{(k)} - P_n^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f_n^{(k+1)} - P_n^{(k+1)}\right\|_\infty$ pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$ donc

$$\forall k \in [\![0, K-1]\!] \quad , \quad \left\|f_n^{(k)} - P_n^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f_n^{(K)}\right\|_\infty \quad (P_n^{(K)} = 0)$$

Remarquons que $\mathbb{P}(|X_n| = 1) = 1$ et $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [|X_n| = 1]\right) = 1$ car les X_n sont indépendantes. Notons $E = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [|X_n| = 1]$.

Si $\omega \in E$ alors

$$\left|X_n(\omega)\,(f_n - P_n)^{(k)}\right| \leq \left\|f_n^{(K)}\right\|_\infty$$

ce qui prouve la convergence normale et uniforme de la série $\sum X_n(\omega)\,(f_n - P_n)^{(k)}$sur $[0,1]$.

De la partie II.A (H1 et H2 sont vérifiées) la fonction

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} X_n(\omega)\,(f_n(x) - P_n(x))$$

est de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[0,1]$ et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} X_n(\omega)\,(f_n(x) - P_n(x))\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} X_n(\omega)\,(f_n(x) - P_n(x))^{(k)}$$

pour tout $k \in [\![0, K]\!]$.

Ainsi $E \subset A$ et ce dernier se réalise avec une probabilité 1 .

Q 33. Notons A' l'événement considéré dans cette question . Écrivons $f_n = X_n P_n + X_n\,(f_n - P_n)$.

L'ensemble A des ω tels que $\sum X_n(\omega)\,(f_n - P_n)$ vérifie Q32 est de probabilité 1.

Pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$ les séries $\sum X_n f_n\,(x_\ell)$ convergent avec une probabilité 1, notons C cet événement. de la question 7 , on a $P_n = \sum\limits_{j=1}^{K} f_n\,(x_j)\,L_j$ qui définit une fonction polynomiale de degré $\leqslant K-1$ de classe $\mathcal{C}^K$ et

$$\forall k \in [\![0,\ K]\!], P_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{K} f_n\,(x_j)\,L_j^{(k)}$$

Donc pour tout $\omega \in A'$, les series $\sum X_n\,(\omega)\,P_n^{(k)}$ convergent pour tout $k \in [\![1, K]\!]$, de somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} X_n\,(\omega)\,P_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{K}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} X_n\,(\omega)\,f_n\,(x_j)\right) L_j^{(k)}$$

qui sont des fonctions polynomiales.

Ainsi $A \cap C \subset A'$ or $A \subset C$ donc $A \subset A'$ d'où A' est de probabilité 1.

Q 34. f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n}$ donc $\sum\limits_{n\geq 1} f_n^2(x)$ converge pour tout x dans $[0,1]$.

On a $f_n(x) = f_1(\frac{x}{n})$, donc pour tout $k \geq 1$ $f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n^k} f_1^{(k)}(\frac{x}{n})$ ce qui donne $\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty \leq \frac{1}{n^k}\left\|f_1^{(k)}\right\|_\infty$.

L'événement précédent se réalise pour tout $K \geq 2$.

• • • FIN • • •