DM 5 - Suite

Exercice 1 (Approximation du nombre d'or)

On appelle nombre d'or et on note ϕ la racine réelle positive du polynôme $X^2 - X - 1$.

1. Exprimer ϕ et justifier, sans calculatrice, que $1 < \phi < 2$.
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par
$$u_1 = \sqrt{1},\ u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}},\ u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$
et ainsi de suite,
$$u_n = \sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$
avec n racines.
Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_{n+1} en fonction de u_n et donner f tel que $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Dresser le tableau de variation de f et montrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$0 \leq u_n \leq \phi.$$
4. Etudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \geq -1$ et montrer que la suite (u_n) est croissante.
5. Démontrer que (u_n) converge vers ϕ.
6. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|.$$
Indication : on peut commencer par montrer que $u_{n+1} - \phi = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi}$ et utiliser l'expression conjuguée.
7. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,
$$|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$
8. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Utiliser la question précédente pour déterminer n tel que u_n est une approximation à 10^{-p} près de ϕ.

---

1. Le calcul avec le discriminant donne $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   On peut ensuite procéder par encadrement à partir de $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ en estimant $\sqrt{5}$, mais on peut aussi, en posant $P(x) = x^2 - x - 1$ dire que $P(1) = -1$ tandis que $P(2) = 1$: la racine est donc entre 1 et 2, d'où
$$\boxed{1 < \phi < 2}$$

2. On observe qu'il s'agit à chaque fois d'ajouter 1 et de prendre la racine du tout. Ainsi, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

3. La fonction f est définie sur $[-1, +\infty[$, et dérivable sur $]-1, +\infty[$ avec $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$.
   Ainsi, f est croissante sur $[-1, +\infty[$.
   L'énoncé ne l'indique pas, mais il y a un problème d'existence pour (u_n). On doit vérifier que (u_n) est bien définie, ce qu'on va inclure dans notre récurrence.
   Par récurrence, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \in [0, \phi]$.
   Initialisation : on a déjà $u_1 = 1 \in [0, \phi]$
   Hérédité : Soit $n \geq 1$, supposons que u_n existe et que $u_n \in [0, \phi]$.
   Comme f est définie sur $[0, \phi]$, on peut calculer $f(u_n)$ et u_{n+1} existe.
   De plus, comme $0 \leq u_n \leq \phi$, par croissance de f il vient
$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(\phi)$$
   Enfin, $f(0) = 1 \geq 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et comme $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, on a $f(\phi) = \sqrt{1+\phi} = \sqrt{\phi^2} = \phi$
   On en déduit
$$0 \leq u_{n+1} \leq \phi$$
   et la propriété est héréditaire.
   Par le principe de récurrence,
$$\boxed{\forall n \geq 1, u_n \in [0, \phi]}$$

4. En posant $g(x) = f(x) - x = \sqrt{1+x} - x$, on a

$$g(x) = 0 \iff \sqrt{1+x} = x \iff 1 + x = x^2 \text{ et } x \geq 0$$

Donc $g(x) = 0 \iff x = \phi$ et en regardant $g(0)$ puis $g(2)$ (par exemple) on déduit le signe de $g(x)$:

x	$-1 \quad \phi \quad +\infty$
$f(x) - x$	$+ \, 0 \, -$

Comme pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [0, \phi]$ et que pour tout $x \in [0, \phi]$, $f(x) - x \geq 0$, on a $f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n \geq 0$.
La suite est donc croissante.

5. La suite est croissante et majorée par ϕ, donc elle converge vers une limite $\ell \leq \phi$. De plus, comme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue, on a, par passage à la limite, $\ell = f(\ell)$, d'où $\ell = \phi$.

$$\boxed{\lim u_n = \phi}$$

6. On suit l'indication : $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ par définition, et on a vu que $\sqrt{1+\phi} = \phi$, donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \phi &= \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi} \\ &= \frac{(\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi})(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi})}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}} \\ &= \frac{1 + u_n - 1 - \phi}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}} \end{aligned}$$

Ainsi $|u_{n+1} - \phi| = |\dfrac{u_n - \phi}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}}|$
Or $\sqrt{1+u_n} \geq 1$ et $\sqrt{1+\phi} \geq 1$, donc $\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi} \geq 2$ et finalement

$$|u_{n+1} - \phi| \leq |\frac{u_n - \phi}{2}|$$

7. C'est une récurrence facile avec la propriété précédente :

Initialisation : pour $n = 1$, on a, d'après la première question, $|u_1 - \phi| = |1 - \phi| \leq 1 = \dfrac{1}{2^{1-1}}$

Héréditié : Soit $n \geq 1$. Supposons que $|u_n - \phi| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$, alors

$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

La propriété est donc héréditaire et l'inégalité est vérifiée pour tout n.

8. On cherche n assez grand pour avoir $\dfrac{1}{2^{n-1}} < 10^{-p}$, c'est à dire $2^{n-1} > 10^p$, donc $n > p\dfrac{\ln(10)}{\ln(2)} + 1$.
Ainsi, n est (presque) proportionnel à p : c'est un algorithme assez rapide. Pas autant que Babylone, mais très raisonnable quand même. En estimant $ln(10)/ln(2)$ à environ 3, donc pour $n = 300$, on a une précision de 100 chiffres après la virgule. A la main, c'est pas hyper rapide, mais pour un ordinateur, c'est quasiment immédiat.

Exercice 2 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = \dfrac{x-n}{x+n} - e^{-x}$.

1. a) Déterminez l'ensemble de définition de f_n en fonction de n et justifiez qu'elle est continue sur cet ensemble de définition.
   b) Peut-on prolonger f_n par continuité afin d'en faire une fonction continue sur $\mathbb{R}$? Justifiez soigneusement votre réponse.
   c) Etudiez les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
   d) Y-a-t-il des asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$?
2. On restreint f_n à l'intervalle $[0, +\infty[$.
   a) Donnez le tableau de variation de f_n sur cet intervalle et montrez qu'il existe un unique réel $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
   b) Montrez que pour tout n, $n < u_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
   c) Calculez $f\left(n\left(\dfrac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)\right)$ afin de montrer que $u_n \leq n\left(\dfrac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)$.

d) En déduire que $\lim \frac{u_n}{n} = 1$.

---

1. a) La fonction f_n est définie si et seulement si $x+n \neq 0$, d'où le domaine de définition de f_n : $\boxed{D_{f_n} = \mathbb{R} \setminus \{-n\}.}$ Enfin, f_n est continue sur cet ensemble par somme et quotient d'applications continues.

   b) Le problème se pose en $-n$. On a $\lim\limits_{x \to -n^+} \frac{x-n}{x+n} = -\infty$ (forme $\frac{-2n}{0^+}$) : c'est une limite infinie, donc $\boxed{\text{aucun prolongement possible...}}$

   c) En écrivant,
$$\frac{x-n}{x+n} = \frac{x(1-\frac{n}{x})}{x(1+\frac{n}{x})} = \frac{(1-\frac{n}{x})}{(1+\frac{n}{x})}$$
   On obtient $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 1}$ (puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$).
   Attention : c'est bien x qui va à l'infinie, par n, qui est fixé finalement...
   De même, au voisinage de $-\infty$, on peut faire la même factorisation et par somme de limite $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty}$ car on a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.

   d) Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 1$, on a une $\boxed{\text{asymptote horizontale d'équation } y = 1 \text{ en } +\infty.}$
   De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-n}{x(x-n)} - \frac{e^{-x}}{x} = +\infty$ car $\frac{x-n}{x(x-n)} = \frac{(1-\frac{n}{x})}{x(1+\frac{n}{x})} \to 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^{X}}{-X} = -\infty$ par croissance comparée.
   On a donc une $\boxed{\text{branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées}}$.

2. a) La fonction f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ par quotient et somme de fonction dérivables et, pour $x \geq 0$, on a $f_n'(x) = \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x}$.
   Ainsi $f_n'(x) > 0$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. La fonction f est donc strictement croissante et continue. D'après le théorème de la bijection, elle définie donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[)$. Comme on a $f_n(0) = -1 - e^{-0} = -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 1$, f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-2, 1[$ et donc $\boxed{\text{il existe un unique } u_n \text{ tel que } f(u_n) = 0.}$
   Note : on peut également utiliser le TVI + la stricte monotonie pour récupérer l'injectivité, et en déduire l'unicité de u_n.

   b) On observe que ${}_nf(n) = 0 - e^{-n} < 0$ et f_n est croissante, donc $u_n > n$ (le zero est atteint "plus tard"). Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$

   c) C'est le même principe : on calcule $f_n(n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right))$ et regarde son signe. On a :
$$\begin{aligned} f_n(n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)) &= \frac{n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} - 1\right)}{n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} + 1\right)} - e^{-n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)} = \frac{1+e^{-n} - 1 + e^{-n}}{1+e^{-n}+1-e^{-n}} - e^{n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)} \\ &= e^{-n} - e^{-n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)} \end{aligned}$$
   Or, $\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right) > 1$, donc $-ne^{n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)} < -n$. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ étant strictement décroissante, on a donc $e^{-n} - e^{-n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)} > 0$.
   Conclusion : le 0 est atteint "avant" cette valeur, autrement dit : $\boxed{u_n < n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)}$.

d) On a $n < u_n < n\left(\dfrac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)$, donc $1 < \dfrac{u_n}{n} < \dfrac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}$. Par le théorème d'encadrement, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.