

# ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

Cours

Dans tout ce chapitre,  $E$  désigne un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## I. MATRICES ORTHOGONALES ET ISOMÉTRIES VECTORIELLES

### A. MATRICES ORTHOGONALES

#### 1. DÉFINITIONS

##### Définition 1

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On dit que  $M$  est une *matrice orthogonale* lorsque  $M$  est inversible et  $M^{-1} = M^T$ .

En d'autres termes :

$$M \text{ est orthogonale} \Leftrightarrow MM^T = I_n \Leftrightarrow M^T M = I_n.$$

*Exemple 1* : Montrer que les matrices  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  (avec  $\theta \in \mathbb{R}$ ) et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  sont orthogonales.

##### Définition/Proposition 2

On appelle *groupe orthogonal d'ordre  $n$*  et on note  $O_n(\mathbb{R})$  ou  $O(n)$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

C'est un sous-ensemble de  $GL_n(\mathbb{R})$  qui contient  $I_n$ , qui est stable par produit :

- ▶ si  $M$  et  $N$  sont des matrices orthogonales alors  $MN$  est une matrice orthogonale, et par passage à l'inverse :
- ▶ si  $M$  est une matrice orthogonale alors  $M^{-1}$  est une matrice orthogonale.

#### 2. LIEN AVEC LES BASES ORTHONORMÉES

##### Proposition 3

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$M$  est orthogonale  $\Leftrightarrow$  les colonnes de  $M$  forment une famille orthonormée de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow$  les lignes de  $M$  forment une famille orthonormée de  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$

où  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  sont munis de leur produit scalaire canonique.

#### Proposition 4

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ .

Soit  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ .

$\mathcal{B}'$  est une base orthonormée de  $E \Leftrightarrow \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$  est orthogonale

où  $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$  désigne la matrice des coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

*Formules de changement de bases orthonormées :*

Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux bases orthonormées de  $E$  alors la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  est orthogonale (puisque par définition  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ ).

Si on note  $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  alors  $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = P^{-1} = P^T$ .

Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on a alors :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = P \cdot \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(u) \cdot P^T.$$

### 3. DÉTERMINANT D'UNE MATRICE ORTHOGONALE

#### Proposition 5

Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à 1 ou  $-1$ .

#### Définition/Proposition 6

On appelle *groupe spécial orthogonal d'ordre  $n$*  et on note  $SO_n(\mathbb{R})$  ou  $SO(n)$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de déterminant égal à 1.

C'est un sous-ensemble de  $O_n(\mathbb{R})$  qui contient  $I_n$ , qui est stable par produit et par passage à l'inverse.

#### Définition 7

- ▶ Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases orthonormées de  $E$ . On a  $\det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) \in \{-1, 1\}$ .  
On dit que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  ont la même orientation lorsque  $\det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) = 1$  et que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont d'orientation contraire lorsque  $\det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) = -1$ .
- ▶ Orienter un espace euclidien, c'est choisir l'une de ses bases orthonormées comme base de référence. Les bases orthonormées de même orientation que celle-ci sont dites *orthonormées directes*, et celles d'orientation contraire sont dites *orthonormées indirectes* ou *rétrogrades*.

## B. ISOMÉTRIES VECTORIELLES

### 1. DÉFINITIONS ET EXEMPLES

#### Définition 8

On appelle *isométrie vectorielle* tout endomorphisme  $u$  de  $E$  qui conserve la norme c'est-à-dire qui vérifie :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$

Une isométrie vectorielle est un automorphisme (puisque c'est clairement un endomorphisme injectif de  $E$  avec  $E$  de dimension finie) : on parle aussi d'*automorphisme orthogonal*.

*Rappel* : Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .

On appelle *symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$*  l'application  $s : E \rightarrow E$  définie par :

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\rightarrow E \\ z = x + y &\mapsto x - y \end{aligned} \quad \text{où } (x, y) \text{ est l'unique couple de } F \times G \text{ tel que } z = x + y.$$

#### Définition 9

Soit  $s : E \rightarrow E$ .

On dit que  $s$  est une *symétrie orthogonale* lorsque  $s$  est une symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  parallèlement à  $F^\perp$ .

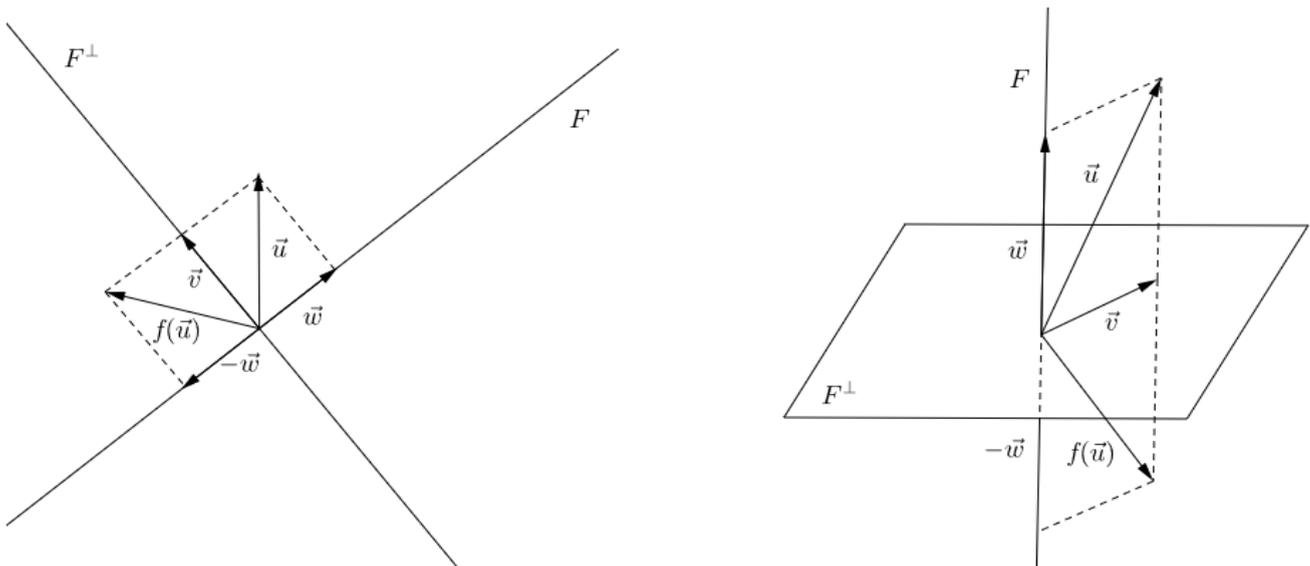
#### Définition 10

Soit  $D$  une droite vectorielle c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 1.

On appelle *réflexion d'axe  $D$*  la symétrie par rapport à  $D^\perp$  parallèlement à  $D$ .

On notera qu'une réflexion est en particulier une symétrie orthogonale puisque  $D = (D^\perp)^\perp$ .

*Illustration graphique dans le plan et l'espace d'une réflexion  $f$  d'axe  $F$*  :



Exemple 2 :

1. Montrer qu'une symétrie orthogonale est une isométrie.
2. Une projection orthogonale est-elle une isométrie ?

### Définition/Proposition 11

On appelle *groupe orthogonal* de  $E$  et on note  $O(E)$  l'ensemble des isométries vectorielles de  $E$ .

C'est un sous-ensemble de  $GL(E)$  qui contient  $\text{Id}_E$ , qui est stable par composition :

- ▶ si  $u$  et  $v$  sont des isométries vectorielles alors  $u \circ v$  est une isométrie vectorielle, et par passage à l'endomorphisme réciproque :
- ▶ si  $u$  est une isométrie vectorielle alors  $u^{-1}$  est une isométrie vectorielle.

## 2. CARACTÉRISATIONS

### Proposition 12

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

$u$  est une isométrie vectorielle si et seulement si  $u$  conserve le produit scalaire c'est-à-dire vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

### Corollaire 13

Soit  $u \in O(E)$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Si  $F$  est stable par  $u$  alors  $F^\perp$  est stable par  $u$ .

### Proposition 14

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ .

$u$  est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image de  $\mathcal{B}$  par  $u$  est une base orthonormée de  $E$ .

## 3. LIEN AVEC LES MATRICES ORTHOGONALES

### Proposition 15

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base **orthonormée** de  $E$ .

$u$  est une isométrie vectorielle si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est orthogonale.

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . En appliquant le résultat précédent avec la base canonique, on obtient :

$$\begin{aligned} M \text{ est orthogonale} &\Leftrightarrow X \mapsto MX \text{ est une isométrie vectorielle de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \text{l'endomorphisme de } \mathbb{R}^n \text{ canoniquement associé à } M \\ &\text{est une isométrie vectorielle} \end{aligned}$$

**Corollaire 16**

Le déterminant d'une isométrie vectorielle est égal à 1 ou  $-1$ .

*Exemple 3* : Donner le déterminant d'une réflexion d'axe  $D$ .

## C. ISOMÉTRIES VECTORIELLES D'UN PLAN EUCLIDIEN

**Théorème 17** (*Détermination de  $O_2(\mathbb{R})$  et  $SO_2(\mathbb{R})$* )

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on note :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ et } S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

On a :

$$O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\theta, \theta \in \mathbb{R}\} \text{ et } SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

**Proposition 18**

- ▶ Pour tout  $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ , on a  $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'} R_\theta$ .
- ▶ Les éléments de  $SO_2(\mathbb{R})$  commutent.
- ▶ Pour tout  $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ , on a  $S_\theta S_{\theta'} = R_{-\theta'}$ .

Notons quelques conséquences de ces résultats :

- ▶ pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $R_\theta R_{-\theta} = I_2$  donc  $R_\theta^{-1} = R_{-\theta} = R_\theta^T$ ,
- ▶ pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $S_\theta^2 = I_2$  donc  $S_\theta^{-1} = S_\theta = S_\theta^T$ .

**Théorème 19** (*Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien*)

Soit  $E$  un espace euclidien orienté de dimension 2.

- ▶ Soit  $u \in O(E)$  tel que  $\det(u) = 1$ .  
Alors il existe un réel  $\theta$ , unique à un multiple entier de  $2\pi$  près, tel que pour toute base  $\mathcal{B}$  orthonormale directe, on a  $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta$ .  
On dit que  $u$  est la *rotation d'angle  $\theta$* .
- ▶ Soit  $u \in O(E)$  tel que  $\det(u) = -1$ .  
Alors  $u$  est la réflexion d'axe  $D = \text{Ker}(u + \text{Id}_E)$ .

Soit  $r_\theta$  la rotation d'angle  $\theta$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée directe de  $E$ .

Si  $x$  a pour coordonnées  $(a, b)$  dans la base  $\mathcal{B}$  alors  $r_\theta(x)$  a pour coordonnées  $(a', b')$  dans la base  $\mathcal{B}$  où :

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta - b \sin \theta \\ a \sin \theta + b \cos \theta \end{pmatrix}.$$

**Définition/Proposition 20**

Soit  $E$  un espace euclidien orienté de dimension 2.

Soit  $x$  et  $y$  deux vecteurs non nuls de  $E$ .

Il existe un réel  $\theta$ , unique à un multiple entier de  $2\pi$  près, tel que  $r_\theta \left( \frac{x}{\|x\|} \right) = \frac{y}{\|y\|}$

(où  $r_\theta$  désigne la rotation d'angle  $\theta$ ).

Ce réel  $\theta$  (défini à un multiple entier de  $2\pi$  près) est appelé *mesure de l'angle orienté*  $(x, y)$ .

## II. MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES ET ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS

### A. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

#### 1. MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES

**Définition 21**

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On dit que  $M$  est une *matrice symétrique* lorsque  $M^\top = M$ .

Ainsi :

$$M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ est symétrique } \Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{i,j} = m_{j,i}.$$

*Exemple* : Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . La matrice  $A^\top A$  est une matrice symétrique.

**Définition/Proposition 22**

On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques réelles.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

#### 2. ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS

**Définition 23**

On appelle *endomorphisme autoadjoint* tout endomorphisme  $u$  de  $E$  qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

On parle aussi d'*endomorphisme symétrique*.

*Exemple 4* :

1. Soit  $k \in \mathbb{R}$ . Montrer que l'homothétie de rapport  $k$  est un endomorphisme autoadjoint.
2. Montrer qu'une symétrie orthogonale est un endomorphisme autoadjoint.

**Proposition 24**

Soit  $p$  un projecteur sur  $E$ .  
 $p$  est un projecteur orthogonal si et seulement si  $p$  est un endomorphisme autoadjoint.

**Définition/Proposition 25**

On note  $\mathcal{S}(E)$  l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de  $E$ .  
 $\mathcal{S}(E)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .

**3. LIEN ENTRE LES MATRICES SYMÉTRIQUES ET LES ENDOMORPHISMES AUTOAJOINTS****Proposition 26**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base **orthonormée** de  $E$ .  
 $u$  est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est symétrique.

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . En appliquant le résultat précédent avec la base canonique, on obtient :

$M$  est symétrique  $\Leftrightarrow X \mapsto MX$  est un endomorphisme autoadjoint de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$   
 $\Leftrightarrow$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $M$   
est un endomorphisme autoadjoint

*Conséquence* : Notons  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $M$ .  
 $u$  est un projecteur orthogonal si et seulement si  $M^2 = M$  et  $M^T = M$ .

**B. THÉORÈME SPECTRAL****Proposition 27**

Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ . Soit  $(\lambda, \mu) \in (\text{Sp}(u))^2$  avec  $\lambda \neq \mu$ .  
Si  $x \in E_\lambda(u)$  et  $y \in E_\mu(u)$  alors  $x \perp y$ .

**Théorème 28 (Théorème spectral)**

Si  $u$  est un endomorphisme autoadjoint de  $E$  alors  $u$  est diagonalisable dans une base orthonormée ce qui signifie :

- ▶ il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale ou encore
- ▶ il existe une base orthonormée de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

- ▶ On rappelle que par définition, un endomorphisme  $u$  de  $E$  est diagonalisable lorsqu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale. Pour un endomorphisme autoadjoint, une telle base existe et on peut de plus la choisir orthonormée.

- ▶ En pratique, pour diagonaliser un endomorphisme autoadjoint dans une base orthonormée, on détermine les valeurs propres de  $u$  et on cherche une base de chaque sous-espace propre que l'on orthonormalise grâce au procédé de Gram-Schmidt. En juxtaposant les bases orthonormées de chaque sous-espace propre, on obtient une base orthonormée de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$  (on obtient une base de  $E$  car  $E$  est égal à la somme directe des sous-espaces propres de  $u$  et elle est orthonormée par la *Proposition 27*).

**Proposition 29**

Soit  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $(\lambda, \mu) \in (\text{Sp}(M))^2$  avec  $\lambda \neq \mu$ .  
Si  $X \in E_\lambda(M)$  et  $Y \in E_\mu(M)$  alors  $X \perp Y$ .

**Théorème 30 (Théorème spectral)**

Si  $M$  est une matrice symétrique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  alors  $M$  est diagonalisable dans une base orthonormée ce qui signifie :

- ▶ il existe une base orthonormée de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $M$ , ou encore
- ▶ il existe une matrice orthogonale  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $M = PDP^\top$ .

- ▶ On rappelle que par définition, une matrice  $M$  est diagonalisable lorsqu'il existe une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $M = PDP^{-1}$ . Pour une matrice symétrique réelle, une telle décomposition existe dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et on peut de plus choisir  $P$  orthogonale.
- ▶ Attention, ce résultat n'est pas valable pour des matrices symétriques à coefficients complexes.
- ▶ En pratique, pour diagonaliser une matrice symétrique réelle dans une base orthonormée, on détermine les valeurs propres de  $M$  et on cherche une base de chaque sous-espace propre que l'on orthonormalise grâce au procédé de Gram-Schmidt. En juxtaposant les bases orthonormées de chaque sous-espace propre, on obtient une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $M$  (on obtient une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  car  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est égal à la somme directe des sous-espaces propres de  $M$  et elle est orthonormée par la *Proposition 29*).

On note  $P$  la matrice obtenue en écrivant les vecteurs de  $\mathcal{B}$  en colonne. C'est la matrice de passage de la base canonique  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , qui est orthonormée, à la base orthonormée  $\mathcal{B}$  donc  $P$  est orthogonale c'est-à-dire  $P^{-1} = P^\top$ .

Par les relations de changement de base, en notant  $\varphi_M$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  canoniquement associé à  $M$ , on obtient :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi_M) = P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_M) P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$$

c'est-à-dire  $M = PDP^\top$  avec  $D$  diagonale.

*Exemple 5 :*

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

Déterminer deux matrices  $P$  et  $D$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  avec  $D$  diagonale tel que  $A = PDP^\top$ .

2. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Déterminer une matrice  $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  diagonale telle que  $S_\theta = R_{\theta/2} D R_{-\theta/2}$ .

## C. POSITIVITÉ, DÉFINIE POSITIVITÉ

### 1. DÉFINITIONS

#### Définition 31

Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ .

- ▶  $u$  est dit *positif* lorsque pour tout  $x \in E$ ,  $\langle u(x), x \rangle \geq 0$ .
- ▶  $u$  est dit *défini positif* lorsque pour tout  $x \in E \setminus \{0_E\}$ ,  $\langle u(x), x \rangle > 0$ .

#### Définition 32

- ▶ On note  $\mathcal{S}^+(E)$  l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs.
- ▶ On note  $\mathcal{S}^{++}(E)$  l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs.

#### Définition 33

Soit  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

- ▶  $M$  est dite *positive* lorsque pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $X^\top M X \geq 0$ .
- ▶  $M$  est dite *définie positive* lorsque pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$ ,  $X^\top M X > 0$ .

*Exemple 6* : La matrice symétrique  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  est-elle positive ? définie positive ?

#### Définition 34

- ▶ On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques positives.
- ▶ On note  $\mathcal{S}_n^{++}(E)$  l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

### 2. LIENS ENDOMORPHISMES/MATRICES

#### Proposition 35

- ▶ Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$$M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff X \mapsto M X \in \mathcal{S}^+(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})).$$

$$M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff X \mapsto M X \in \mathcal{S}^{++}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})).$$

- ▶ Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ .

$$u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

$$u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

### 3. CARACTÉRISATIONS SPECTRALES

#### **Théorème 36**

Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ .

- ▶  $u$  est positif si et seulement si  $\text{Sp}(u) \subset [0, +\infty[$ .
- ▶  $u$  est défini positif si et seulement si  $\text{Sp}(u) \subset ]0, +\infty[$ .

#### **Théorème 37**

Soit  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

- ▶  $M$  est positive si et seulement si  $\text{Sp}(M) \subset [0, +\infty[$ .
- ▶  $M$  est définie positive si et seulement si  $\text{Sp}(M) \subset ]0, +\infty[$ .

*Exemple 7* : La matrice symétrique  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  est-elle positive ? définie positive ?