

ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

Cours

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I. MATRICES ORTHOGONALES ET ISOMÉTRIES VECTORIELLES

A. MATRICES ORTHOGONALES

1. DÉFINITIONS

Définition 1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que M est une *matrice orthogonale* lorsque M est inversible et $M^{-1} = M^T$.

En d'autres termes :

$$M \text{ est orthogonale} \Leftrightarrow MM^T = I_n \Leftrightarrow M^T M = I_n.$$

Exemple 1 : Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$) et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

Définition/Proposition 2

On appelle *groupe orthogonal d'ordre n* et on note $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

C'est un sous-ensemble de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient I_n , qui est stable par produit :

- ▶ si M et N sont des matrices orthogonales alors MN est une matrice orthogonale, et par passage à l'inverse :
- ▶ si M est une matrice orthogonale alors M^{-1} est une matrice orthogonale.

2. LIEN AVEC LES BASES ORTHONORMÉES

Proposition 3

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

M est orthogonale \Leftrightarrow les colonnes de M forment une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

\Leftrightarrow les lignes de M forment une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$

où $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ sont munis de leur produit scalaire canonique.

Proposition 4

Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E .

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une famille de n vecteurs de E .

\mathcal{B}' est une base orthonormée de $E \Leftrightarrow \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est orthogonale

où $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ désigne la matrice des coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} .

Formules de changement de bases orthonormées :

Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases orthonormées de E alors la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' est orthogonale (puisque par définition $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$).

Si on note $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ alors $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = P^{-1} = P^T$.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a alors :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = P \cdot \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(u) \cdot P^T.$$

3. DÉTERMINANT D'UNE MATRICE ORTHOGONALE

Proposition 5

Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à 1 ou -1 .

Définition/Proposition 6

On appelle *groupe spécial orthogonal d'ordre n* et on note $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

C'est un sous-ensemble de $O_n(\mathbb{R})$ qui contient I_n , qui est stable par produit et par passage à l'inverse.

Définition 7

- ▶ Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormées de E . On a $\det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) \in \{-1, 1\}$.
On dit que \mathcal{B} et \mathcal{B}' ont la même orientation lorsque $\det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) = 1$ et que \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont d'orientation contraire lorsque $\det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) = -1$.
- ▶ Orienter un espace euclidien, c'est choisir l'une de ses bases orthonormées comme base de référence. Les bases orthonormées de même orientation que celle-ci sont dites *orthonormées directes*, et celles d'orientation contraire sont dites *orthonormées indirectes* ou *rétrogrades*.

B. ISOMÉTRIES VECTORIELLES

1. DÉFINITIONS ET EXEMPLES

Définition 8

On appelle *isométrie vectorielle* tout endomorphisme u de E qui conserve la norme c'est-à-dire qui vérifie :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$

Une isométrie vectorielle est un automorphisme (puisque c'est clairement un endomorphisme injectif de E avec E de dimension finie) : on parle aussi d'*automorphisme orthogonal*.

Rappel : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

On appelle *symétrie par rapport à F parallèlement à G* l'application $s : E \rightarrow E$ définie par :

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\rightarrow E \\ z = x + y &\mapsto x - y \end{aligned} \quad \text{où } (x, y) \text{ est l'unique couple de } F \times G \text{ tel que } z = x + y.$$

Définition 9

Soit $s : E \rightarrow E$.

On dit que s est une *symétrie orthogonale* lorsque s est une symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel F de E parallèlement à F^\perp .

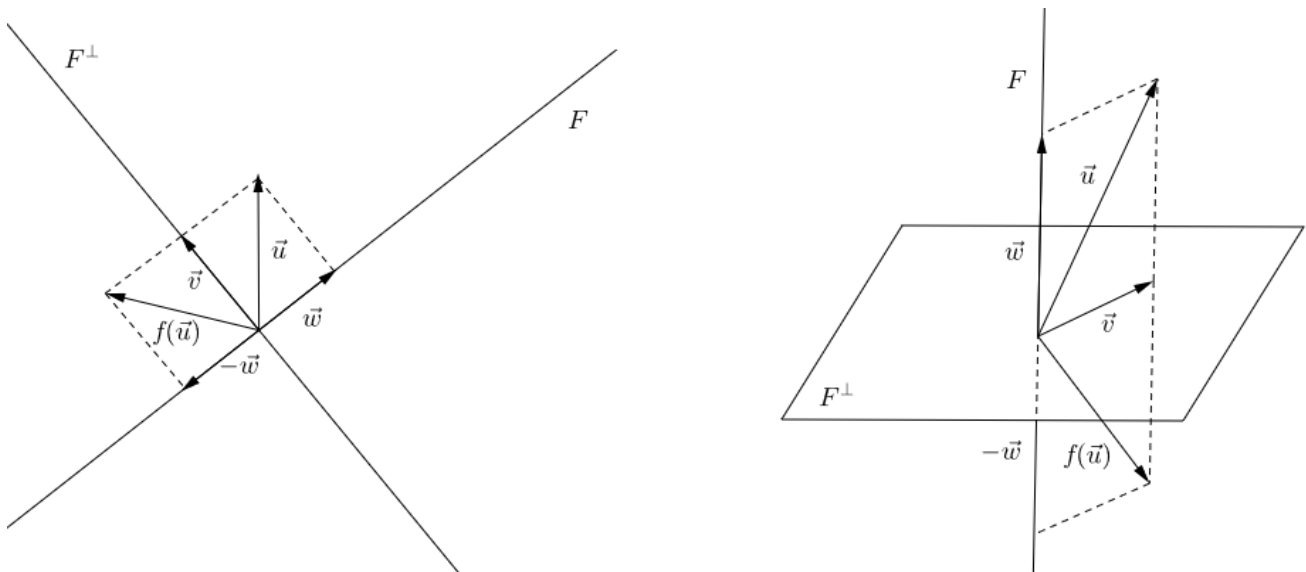
Définition 10

Soit D une droite vectorielle c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E de dimension 1.

On appelle *réflexion d'axe D* la symétrie par rapport à D^\perp parallèlement à D .

On notera qu'une réflexion est en particulier une symétrie orthogonale puisque $D = (D^\perp)^\perp$.

Illustration graphique dans le plan et l'espace d'une réflexion f d'axe F :



Exemple 2 :

1. Montrer qu'une symétrie orthogonale est une isométrie.
2. Une projection orthogonale est-elle une isométrie ?

Définition/Proposition 11

On appelle *groupe orthogonal* de E et on note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E .

C'est un sous-ensemble de $GL(E)$ qui contient Id_E , qui est stable par composition :

- ▶ si u et v sont des isométries vectorielles alors $u \circ v$ est une isométrie vectorielle, et par passage à l'endomorphisme réciproque :
- ▶ si u est une isométrie vectorielle alors u^{-1} est une isométrie vectorielle.

2. CARACTÉRISATIONS

Proposition 12

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

u est une isométrie vectorielle si et seulement si u conserve le produit scalaire c'est-à-dire vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Corollaire 13

Soit $u \in O(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E .
Si F est stable par u alors F^\perp est stable par u .

Proposition 14

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E .

u est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image de \mathcal{B} par u est une base orthonormée de E .

3. LIEN AVEC LES MATRICES ORTHOGONALES

Proposition 15

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit \mathcal{B} une base **orthonormée** de E .

u est une isométrie vectorielle si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est orthogonale.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En appliquant le résultat précédent avec la base canonique, on obtient :

$$\begin{aligned} M \text{ est orthogonale} &\Leftrightarrow X \mapsto MX \text{ est une isométrie vectorielle de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \text{l'endomorphisme de } \mathbb{R}^n \text{ canoniquement associé à } M \\ &\text{est une isométrie vectorielle} \end{aligned}$$

Corollaire 16

Le déterminant d'une isométrie vectorielle est égal à 1 ou -1 .

Exemple 3 : Donner le déterminant d'une réflexion d'axe D .

C. ISOMÉTRIES VECTORIELLES D'UN PLAN EUCLIDIEN

Théorème 17 (*Détermination de $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$*)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ et } S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

On a :

$$O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\theta, \theta \in \mathbb{R}\} \text{ et } SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition 18

- ▶ Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'} R_\theta$.
- ▶ Les éléments de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent.
- ▶ Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a $S_\theta S_{\theta'} = R_{-\theta'}$.

Notons quelques conséquences de ces résultats :

- ▶ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta R_{-\theta} = I_2$ donc $R_\theta^{-1} = R_{-\theta} = R_\theta^T$,
- ▶ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $S_\theta^2 = I_2$ donc $S_\theta^{-1} = S_\theta = S_\theta^T$.

Théorème 19 (*Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien*)

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2.

- ▶ Soit $u \in O(E)$ tel que $\det(u) = 1$.
Alors il existe un réel θ , unique à un multiple entier de 2π près, tel que pour toute base \mathcal{B} orthonormale directe, on a $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta$.
On dit que u est la *rotation d'angle θ* .
- ▶ Soit $u \in O(E)$ tel que $\det(u) = -1$.
Alors u est la réflexion d'axe $D = \text{Ker}(u + \text{Id}_E)$.

Soit r_θ la rotation d'angle θ . Soit \mathcal{B} une base orthonormée directe de E .

Si x a pour coordonnées (a, b) dans la base \mathcal{B} alors $r_\theta(x)$ a pour coordonnées (a', b') dans la base \mathcal{B} où :

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta - b \sin \theta \\ a \sin \theta + b \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Définition/Proposition 20

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2.

Soit x et y deux vecteurs non nuls de E .

Il existe un réel θ , unique à un multiple entier de 2π près, tel que $r_\theta \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = \frac{y}{\|y\|}$

(où r_θ désigne la rotation d'angle θ).

Ce réel θ (défini à un multiple entier de 2π près) est appelé *mesure de l'angle orienté* (x, y) .

II. MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES ET ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS

A. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1. MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES

Définition 21

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que M est une *matrice symétrique* lorsque $M^\top = M$.

Ainsi :

$$M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ est symétrique } \Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{i,j} = m_{j,i}.$$

Exemple : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice $A^\top A$ est une matrice symétrique.

Définition/Proposition 22

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS

Définition 23

On appelle *endomorphisme autoadjoint* tout endomorphisme u de E qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

On parle aussi d'*endomorphisme symétrique*.

Exemple 4 :

1. Soit $k \in \mathbb{R}$. Montrer que l'homothétie de rapport k est un endomorphisme autoadjoint.
2. Montrer qu'une symétrie orthogonale est un endomorphisme autoadjoint.

Proposition 24

Soit p un projecteur sur E .
 p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme autoadjoint.

Définition/Proposition 25

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E .
 $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

3. LIEN ENTRE LES MATRICES SYMÉTRIQUES ET LES ENDOMORPHISMES AUTOAJOINTS**Proposition 26**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit \mathcal{B} une base **orthonormée** de E .
 u est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En appliquant le résultat précédent avec la base canonique, on obtient :

M est symétrique $\Leftrightarrow X \mapsto MX$ est un endomorphisme autoadjoint de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
 \Leftrightarrow l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à M
est un endomorphisme autoadjoint

Conséquence : Notons u l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à M .
 u est un projecteur orthogonal si et seulement si $M^2 = M$ et $M^T = M$.

B. THÉORÈME SPECTRAL**Proposition 27**

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E . Soit $(\lambda, \mu) \in (\text{Sp}(u))^2$ avec $\lambda \neq \mu$.
Si $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$ alors $x \perp y$.

Théorème 28 (Théorème spectral)

Si u est un endomorphisme autoadjoint de E alors u est diagonalisable dans une base orthonormée ce qui signifie :

- ▶ il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ou encore
- ▶ il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u .

- ▶ On rappelle que par définition, un endomorphisme u de E est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Pour un endomorphisme autoadjoint, une telle base existe et on peut de plus la choisir orthonormée.

- ▶ En pratique, pour diagonaliser un endomorphisme autoadjoint dans une base orthonormée, on détermine les valeurs propres de u et on cherche une base de chaque sous-espace propre que l'on orthonormalise grâce au procédé de Gram-Schmidt. En juxtaposant les bases orthonormées de chaque sous-espace propre, on obtient une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u (on obtient une base de E car E est égal à la somme directe des sous-espaces propres de u et elle est orthonormée par la *Proposition 27*).

Proposition 29

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $(\lambda, \mu) \in (\text{Sp}(M))^2$ avec $\lambda \neq \mu$.
Si $X \in E_\lambda(M)$ et $Y \in E_\mu(M)$ alors $X \perp Y$.

Théorème 30 (Théorème spectral)

Si M est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors M est diagonalisable dans une base orthonormée ce qui signifie :

- ▶ il existe une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M , ou encore
- ▶ il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^\top$.

- ▶ On rappelle que par définition, une matrice M est diagonalisable lorsqu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$. Pour une matrice symétrique réelle, une telle décomposition existe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on peut de plus choisir P orthogonale.
- ▶ Attention, ce résultat n'est pas valable pour des matrices symétriques à coefficients complexes.
- ▶ En pratique, pour diagonaliser une matrice symétrique réelle dans une base orthonormée, on détermine les valeurs propres de M et on cherche une base de chaque sous-espace propre que l'on orthonormalise grâce au procédé de Gram-Schmidt. En juxtaposant les bases orthonormées de chaque sous-espace propre, on obtient une base orthonormée \mathcal{B} de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M (on obtient une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est égal à la somme directe des sous-espaces propres de M et elle est orthonormée par la *Proposition 29*).

On note P la matrice obtenue en écrivant les vecteurs de \mathcal{B} en colonne. C'est la matrice de passage de la base canonique \mathcal{C} de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, qui est orthonormée, à la base orthonormée \mathcal{B} donc P est orthogonale c'est-à-dire $P^{-1} = P^\top$.

Par les relations de changement de base, en notant φ_M l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à M , on obtient :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi_M) = P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_M) P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$$

c'est-à-dire $M = PDP^\top$ avec D diagonale.

Exemple 5 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer deux matrices P et D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec D diagonale tel que $A = PDP^\top$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Déterminer une matrice $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telle que $S_\theta = R_{\theta/2} D R_{-\theta/2}$.

C. POSITIVITÉ, DÉFINIE POSITIVITÉ

1. DÉFINITIONS

Définition 31

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

- ▶ u est dit *positif* lorsque pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x \rangle \geq 0$.
- ▶ u est dit *défini positif* lorsque pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $\langle u(x), x \rangle > 0$.

Définition 32

- ▶ On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs.
- ▶ On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs.

Définition 33

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- ▶ M est dite *positive* lorsque pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top M X \geq 0$.
- ▶ M est dite *définie positive* lorsque pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, $X^\top M X > 0$.

Exemple 6 : La matrice symétrique $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle positive ? définie positive ?

Définition 34

- ▶ On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.
- ▶ On note $\mathcal{S}_n^{++}(E)$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

2. LIENS ENDOMORPHISMES/MATRICES

Proposition 35

- ▶ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff X \mapsto MX \in \mathcal{S}^+(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})).$$

$$M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff X \mapsto MX \in \mathcal{S}^{++}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})).$$

- ▶ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E .

$$u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

$$u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

3. CARACTÉRISATIONS SPECTRALES

Théorème 36

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

- ▶ u est positif si et seulement si $\text{Sp}(u) \subset [0, +\infty[$.
- ▶ u est défini positif si et seulement si $\text{Sp}(u) \subset]0, +\infty[$.

Théorème 37

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- ▶ M est positive si et seulement si $\text{Sp}(M) \subset [0, +\infty[$.
- ▶ M est définie positive si et seulement si $\text{Sp}(M) \subset]0, +\infty[$.

Exemple 7 : La matrice symétrique $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle positive ? définie positive ?