ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

Exercices

1 Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in O(n)$.

1. Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{i,j}| \leqslant 1$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}| \geqslant n$. *On pourra calculer* $tr(A^\top A)$.
3. Montrer que $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\right| \leqslant n$. *On pourra calculer* $\langle AU, U\rangle$ *pour* $U = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

2 On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.

1. Montrer que $x+y+z=0$ définit un plan $\mathscr{P}$ et déterminer une base orthonormée de $\mathscr{P}^\perp$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan $\mathscr{P}$ puis celle de la réflexion d'axe $\mathscr{P}^\perp$.

3 Un endomorphisme f d'un espace euclidien E est une *similitude vectorielle* s'il existe une isométrie vectorielle u et un réel strictement positif α tels que $f = \alpha u$.

1. Montrer que, si f est une similitude vectorielle alors elle conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire :
$$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = 0.$$
2. On suppose que g est un endomorphisme non nul de E conservant l'orthogonalité.
   (a) Soit a et b deux vecteurs unitaires de E. Calculer $\langle a+b, a-b\rangle$.
   (b) Montrer que $\|g(a)\| = \|g(b)\|$. Peut-on avoir $\|g(a)\| = 0$?
   (c) En déduire qu'il existe une isométrie vectorielle v et un réel strictement positif α tel que $g = \alpha v$. Conclure.

4 Pour chaque matrice, reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé : projecteur, projection orthogonale, symétrie, symétrie orthogonale, réflexion, rotation et préciser ses caractéristiques.

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\ ;\ B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\ ;\ C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\ ;\ D = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}\ ;\ E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

5 *Factorisation QR*

1. Soit $\mathscr{B}$ une base d'un espace euclidien E et soit $\mathscr{C}$ l'orthonormalisée de Schmidt de $\mathscr{B}$.
   Que peut-on dire de la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$?
2. Montrer que, pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure R dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs telles que $A = QR$.
3. Démontrer que le couple (Q,R) est unique.

$\boxed{6}$ Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $u \in E$, u non nul.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on considère l'endomorphisme f défini par :

$$f(x) = x - \lambda\langle x, u\rangle u.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E.
2. Montrer que 1 est valeur propre de f puis donner les éléments propres de f.
3. Déterminer les scalaires λ pour lesquels f est une isométrie vectorielle.
   Reconnaître f dans ce cas.

$\boxed{7}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $(P, Q) \in E^2$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^\pi P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. *Polynômes de Tchebychev*
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_k de degré k tel que :

   $$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta).$$

   (b) Montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une famille orthogonale de E.
   (c) Déterminer $\|T_k\|$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. En déduire une base orthonormée de E.
3. Montrer que $\varphi : P \mapsto (1 - X^2)P'' - XP'$ est un endomorphisme autoadjoint de E.

$\boxed{8}$ Diagonaliser les matrices suivantes dans une base orthonormée.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{9}$ Montrer que toute matrice de $O_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
Quelles sont les matrices de $O_2(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?
Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que si λ est une valeur propre réelle de M alors $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

$\boxed{10}$ Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E de dimension n.
On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de u, comptées avec leur multiplicité.
Démontrer que :

$$\forall x \in E,\ \lambda_1\|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \leqslant \lambda_n\|x\|^2$$

$\boxed{11}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^\top MX \geqslant 0$.

(ii) Il existe une matrice symétrique $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = A^2$.

12 Soit E un espace euclidien.
Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $\rho(f) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \text{ valeur propre de } f\}$.
On pose également $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|,\ \|x\| \leqslant 1\}$.
Démontrer que si f est un endomorphisme autoadjoint alors $\|f\| = \rho(f)$.

---

13 Soit E un espace euclidien de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E.
On dit qu'un endomorphisme u de E est antisymétrique si, pour tout vecteur x de E, on a $\langle u(x), x\rangle = 0$.

1. Montrer qu'un endomorphisme u de E est antisymétrique de E si, et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle.$$

2. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que u est antisymétrique si, et seulement si, la matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$ est antisymétrique.
3. On suppose désormais que u désigne un endomorphisme antisymétrique de E.
   (a) Soit λ un réel. Montrer que si λ est valeur propre de u alors $\lambda = 0$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im} u$ et $\mathrm{Ker} u$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E.
   En déduire que $\mathrm{Ker} u = \mathrm{Ker}(u^2)$.
   (c) Montrer que u^2 est un endomorphisme autoadjoint de E et que les valeurs propres de u^2 sont négatives ou nulles.

---

14 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice $AA^\top$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des réels positifs.
2. On suppose que A est nilpotente (c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$) et qu'elle vérifie $AA^\top = A^\top A$.
   Montrer que $AA^\top = 0_n$ puis que $A = 0_n$.

---

15 Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
Soit u un endomorphisme symétrique de E de trace nulle.

1. Montrer qu'il existe un vecteur x de E non nul tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a tous ses cœfficients diagonaux nuls (on pourra raisonner par récurrence).