

La calculatrice est interdite

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Problème n°1 : Electrostatique d'après e3a PSI et d'après PT

- 1 $\vec{E}'(M')$ est le symétrique de $\vec{E}(M)$ par rapport à P_s .
- 2 $\vec{E}(M)$ est son propre symétrique par rapport à P_s donc il est contenu dans le plan P_s .
- 3 $\vec{E}(M)$ est l'opposé de son propre symétrique par rapport à P_a donc il est normal au plan P_a .
- 4 On se place en coordonnées cartésiennes. Soit M un point quelconque n'appartenant pas au plan chargé. Le plan $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie pour les charges, donc pour le champ électrique. Puisque M est dans ce plan, $\vec{E}(M)$ est aussi contenu dans ce plan. On peut dire la même chose pour $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Finalement, $\vec{E}(M)$ est dans l'intersection de ces deux plans, d'où $\vec{E} = E(x, y, z) \vec{u}_z$.
De plus, la distribution de charges est invariante par toute translation parallèlement à Ox ou à Oy, donc le champ électrique aussi, et $\vec{E} = E(z) \vec{u}_z$.
De plus, on a, par symétrie, $E(-z) = -E(z)$. En prenant comme surface de Gauss un parallélépipède rectangle, avec deux de ses faces parallèles à xOy, situées en z et -z, on trouve (cf cours) que $\vec{E}(z) = \text{sgn}(z) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$, uniforme dans chaque demi-espace.

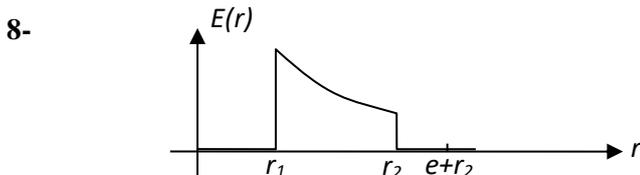
PARTIE II

- 5- On choisit les coordonnées cylindriques. Pour M quelconque, le plan contenant M et l'axe Oz est plan de symétrie pour la distribution de charges, donc pour le champ électrique. M appartient à ce plan, donc le champ en M n'a pas de composante selon le vecteur \vec{u}_θ . Du fait de la « grande longueur » de la ligne, le plan contenant M et orthogonal à Oz est aussi plan de symétrie pour les charges ; donc le champ en M n'a pas de composante selon le vecteur \vec{u}_z des coordonnées cylindriques. En définitive, le champ électrique est radial : $\vec{E} = E(r, \theta, z) \vec{u}_r$.
De plus, la distribution de charges est invariante par toute rotation autour de Oz, donc $E = E(r, z)$.
Et la distribution de charges est invariante par toute translation selon Oz, donc on a $E = E(r)$.

- 6- Le théorème de Gauss appliqué à une surface cylindrique d'axe Oz, de hauteur ℓ donne :

- Pour $r < r_1$: $E(r) 2\pi r \ell = 0$, donc $E(r) = 0$.
- Pour $r_1 < r < r_2$: $E(r) 2\pi r \ell = Q/\epsilon$, $E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon r \ell}$.
- Pour $r_2 < r < e+r_2$: $E(r) 2\pi r \ell = 0$, $E(r) = 0$.

- 7- Pour $r > e+r_2$: $E(r) 2\pi r \ell = 0$, donc $E(r) = 0$.



- 9- $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ donne $E(r) = -\frac{dV}{dr}$ d'où $V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon r \ell} dr$ $V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon \ell} \ln \frac{r_2}{r_1}$

- 10- $C_1 = \frac{Q}{\ell(V_1 - V_2)}$ donne $C_1 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$. Numériquement, $C_1 = 0,92 \text{ pF} \cdot \text{cm}^{-1}$.

- 11- $e_e = \epsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2}$.

12- Energie électrostatique : on intègre e_e sur tout le domaine de l'espace où $E \neq 0$:

$$\mathcal{E}_e = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\ell} \frac{\varepsilon}{2} \frac{Q^2}{4\pi^2 \varepsilon^2 r^2 \ell^2} dz r dr d\theta = 2\pi \frac{\varepsilon Q^2}{8\pi^2 \varepsilon^2 \ell} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon \ell} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{Q^2}{2C_1 \ell} .$$

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} C_1 \ell (V_1 - V_2)^2 .$$

On peut aussi faire la démonstration en intégrant par rapport au temps la puissance électrique reçue pendant le temps permettant à la tension de passer de 0 à $V_1 - V_2$.

PARTIE III : FIL(S) RECTILIGNE(S)

13- Une permittivité s'exprime en $\boxed{\text{F/m}}$. En effet, la capacité d'un condensateur plan est $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$.

14- La $\boxed{\text{distribution de charges étant invariante par toute translation parallèle à Fz}}$, le champ \vec{E} est indépendant de z .

15- On a ici un problème à symétrie cylindrique, donc en se plaçant en coordonnées cylindriques d'axe Fz (et non Oz), $\vec{E} = E(r, \theta, z) \vec{u}_r$. Mais on a montré que E ne dépend pas de z . De même, E ne dépend pas de θ . En définitive,

$$\boxed{\vec{E} = E(r) \vec{u}_r} .$$

On applique le théorème de Gauss sur un cylindre d'axe Fz, de hauteur h et de rayon r :

$$2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}, \text{ donc } \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \vec{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 F M^2} \overrightarrow{FM}} .$$

16- Toujours dans le système de coordonnées cylindriques d'axe Fz (et non Oz), $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$ conduit à $\frac{dV}{dr} = -\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$, d'où $V = -\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln(r) + Cte$.

En se plaçant en O , on a $V_0 = -\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln(a) + Cte$. Par différence, il vient $\boxed{V - V_0 = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{a}{r}\right)}$.

17- On utilise le théorème de superposition pour le potentiel : $V = -\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln(r) + \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln(r') + Cte_2$. En se plaçant en O , on a $V_0 = -\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln(a) + \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln(a) + Cte_2$, d'où $V_0 = Cte_2$, puis $\boxed{V - V_0 = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{r'}{r}\right)}$.

18- Si V tend vers zéro quand M s'éloigne indéfiniment dans le plan xOy , c'est-à-dire quand r' tend vers r , alors $\boxed{V_0 = 0}$. Donc $\boxed{V = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{r'}{r}\right)}$.

19- On voit que $\boxed{\text{pour } r = r', V = Cte = 0}$. Or, $r = r'$ correspond à l'ensemble des points du plan yOz . Ainsi, le plan \boxed{yOz} est une surface équipotentielle plane.

20- Dans ce plan, qui est un $\boxed{\text{plan d'antisymétrie pour la distribution de charges}}$, $\boxed{\text{le champ } \vec{E} \text{ lui est orthogonal}}$.

21- La direction du champ électrique en un point est toujours $\boxed{\text{orthogonal à la surface équipotentielle}}$ passant par ce point. Cela vient de $\boxed{dV = \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot d\vec{M}} = -\vec{E} \cdot d\vec{M}$, donc $dV = 0$ pour $\vec{E} \perp d\vec{M}$.

22- A l'aide du théorème d'Al Kashi, $r'^2 = a^2 + \rho^2 + 2a\rho \cos \theta$, et $r^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \theta$.

Il vient $r' = \rho \left(1 + \frac{2a}{\rho} \cos \theta + \frac{a^2}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq \boxed{\rho \left(1 + \frac{a}{\rho} \cos \theta\right)}$, à l'ordre 1 en $\frac{a}{\rho}$.

De même, $r = \rho \left(1 - \frac{2a}{\rho} \cos \theta + \frac{a^2}{\rho^2} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq \boxed{\rho \left(1 - \frac{a}{\rho} \cos \theta \right)}$.

Le potentiel est $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r'}{r} \right) \simeq \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{1 + \frac{a}{\rho} \cos \theta}{1 - \frac{a}{\rho} \cos \theta} \right) \simeq \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(1 + \frac{2a}{\rho} \cos \theta \right) \simeq \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{2a}{\rho} \cos \theta$. $V \simeq \boxed{\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{a}{\rho} \cos \theta}$.

23- En passant au gradient, on trouve : $E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{a}{\rho^2} \cos \theta$. Et $E_\theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{a}{\rho^2} \sin \theta$.

Pb n°2 : Physique : Ondes sonores

II. Ondes sonores

A) Equation des ondes sonores :

A1a) On applique le principe fondamental de la dynamique à une particule de fluide dans le référentiel terrestre, supposé galiléen :

$$\rho d\tau \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{grad} P d\tau, \text{ d'où } \boxed{\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{grad} P} \quad (E1)$$

A1b) Equation locale de conservation de la masse : $\boxed{div(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$ (E2)

A1c) $\chi = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$, ou encore $\boxed{\chi = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S}$ (E3)

A2a) Approx. acoustique : $|p/P_0|, |\mu/\rho|, |v/c|$ et $|\xi/\lambda|$ sont des **infiniment petits du 1^{er} ordre**.

A2b) (E1), (E2) et (E3) deviennent (cf cours) : $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ (E4) $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ (E5) $\mu = \rho_0 \chi p$ (E6)

A3a) On combine ces 3 équations et on trouve $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$ avec $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}}$.

A3b) $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}}$ $c_0 = 0,33 \text{ km.s}^{-1}$ puisque $7 \times 1,3 \simeq 9$

A3c) Modèle du gaz parfait : $P\rho^{-\gamma} = \text{Cte}$, d'où $\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$ et $\chi = \frac{1}{\gamma P_0}$. $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$.

B) Cas de l'OPPS :

B1a) L'OPPS a une structure **longitudinale**. On le démontre en prenant les notations complexes, et $\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = -\overrightarrow{grad} P$ conduit à $\boxed{\rho j \omega \vec{v} = j \vec{k} P}$. On a bien montré que \vec{v} est colinéaire à \vec{k} .

B1b) Exemples d'ondes planes **longitudinales** : onde longitudinale dans un **ressort massique**, onde de **courant dans une ligne électrique** bifilaire

Exemples d'ondes planes **transversales** : onde de déplacement dans une **corde de guitare**, champ \vec{E} ou \vec{B} d'une onde électromagnétique dans le vide, ou de tension dans une ligne bifilaire.

B2a) L'équation de d'Alembert donne : $(-jk)^2 \underline{p} - \frac{(j\omega)^2}{c_0^2} \underline{p} = 0$, d'où la « relation de dispersion » $\boxed{k^2 c_0^2 = \omega^2}$.

B2b) (E5) et (E6) donnent $j k \underline{v} = \chi j \omega \underline{p}$, d'où $\boxed{\underline{p} = \rho_0 c_0 \underline{v}}$. La surpression et la vitesse sont en phase (pour l'onde se propageant dans le sens des x croissants).

B3a) Le vecteur \vec{R} se nomme vecteur densité de flux de puissance sonore (ou vecteur densité de courant énergétique, ou de Poynting sonore)

B3b) $R = \langle p v \rangle$ d'où $R = \langle \rho_0 c_0 v^2 \rangle = \left\langle \frac{p^2}{\rho_0 c_0} \right\rangle$ puis $\boxed{R = p_0^2 / (2\rho_0 c_0)}$.

B3c) Intensité acoustique : $I = \langle |\vec{R}| \rangle$, $\boxed{I_{dB} = 10 \log \left(\frac{I}{I_{min}} \right)}$, avec $\boxed{I_{min} = 1.10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}}$.

On utilise $10 \log$ pour les grandeurs énergétiques (quadratiques), et $20 \log$ pour les grandeurs de base, donc non quadratiques (tension, courant, vitesse, surpression). On fait cela pour trouver le même nombre de dB, que l'on s'intéresse aux grandeurs de base ou aux grandeurs quadratiques.

B3d) Si l'amplitude de la surpression acoustique de l'OSPPS est multipliée par 2, l'amplitude de la vitesse est multipliée par 2 aussi (puisque $v = \frac{p}{\rho_0 c_0}$).

Et l'intensité acoustique est multipliée par $2^2 = 4$.

B3e) Si l'amplitude de la surpression acoustique de l'OSPPS est multipliée par 100, alors l'intensité en dB subit un accroissement de 40 dB. En effet, $\frac{I_2}{I_1} = 10^4$ puis $10 \log(10^4) = 40$.

Problème n°3 : CHIMIE

D) 1°) On note w_{aaA} la fraction massique en acide acétique dans la solution aqueuse qui entre par le haut, w_{aaD} la fraction massique en acide acétique dans l'extrait (dont le solvant est l'acétate de butyle), et w_{aaC} la fraction massique en acide acétique dans le raffinat.

Le débit massique global se conserve (régime stationnaire) : $A + B = C + D$.

Et le débit massique d'acide acétique aussi : $w_{aaA}A + 0 = w_{aaC}C + w_{aaD}D$.

En combinant ces deux équations, $w_{aaA}A + 0 = w_{aaC}C + w_{aaD}(A + B - C)$,

D'où $C(w_{aaC} - w_{aaD}) = (w_{aaA} - w_{aaD})A - w_{aaD}B$,

puis $C = \frac{(w_{aaA} - w_{aaD})A - w_{aaD}B}{w_{aaC} - w_{aaD}} = \frac{(20-9) \times 100 - 9 \times 200}{3-9} = \frac{700}{6} = \boxed{1,2.10^2 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}}$

Et $\boxed{D = A + B - C = 1,8.10^2 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}}$.

2°) $\boxed{\eta = \frac{w_{aaD}D}{w_{aaA}A} = \frac{9 \times 1,8}{20 \times 100} = 82\%}$. On voit que la solution aqueuse (qui sort par le raffinat) s'est beaucoup appauvrie en acide acétique, et que le solvant acétate de butyle (qui sort par l'extrait) a récupéré une part importante de l'acide acétique.

II) 3°) $[M]_s = [M]_e - \frac{vV}{D_v}$ et $v = k_p [M]_s \sqrt{\frac{2k_0[I]_0}{k_t}}$, donc $[M]_s = [M]_e - \frac{V}{D_v} k_p [M]_s \sqrt{\frac{2k_0[I]_0}{k_t}}$.

De plus, $[M]_s = [M]_e(1 - \alpha)$, d'où $[M]_s = \frac{[M]_e}{1 - \alpha} - \frac{V}{D_v} k_p [M]_s \sqrt{\frac{2k_0[I]_0}{k_t}}$, puis $\frac{\alpha}{1 - \alpha} - \frac{V}{D_v} k_p \sqrt{\frac{2k_0[I]_0}{k_t}} = 0$

Et enfin, $V = \frac{D_v}{k_p} \frac{\alpha}{1 - \alpha} \sqrt{\frac{k_t}{2k_0[I]_0}}$.