DEVOIR MAISON 10 (Espaces probabilisés)

Corrigé

Problème 1 *inspiré CCINP PC 2021*

1. A_1 est l'événement « La boule tirée au premier tirage est blanche ».
Comme l'urne contient initialement b boules blanches et $b+r$ boules au total, on obtient par équiprobabilité :

$$\boxed{P(A_1) = \frac{b}{b+r}.}$$

2. On suppose que l'événement A_1 est réalisé c'est-à-dire que la boule tirée au premier tirage est de couleur blanche.
Avant le deuxième tirage, l'urne contient alors $b+1$ boules blanches et $b+r+1$ boules au total.
L'événement A_2 se réalise lorsqu'on tire une boule blanche au deuxième tirage donc on a par équiprobabilité :

$$\boxed{P_{A_1}(A_2) = \frac{b+1}{b+r+1}.}$$

Par la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $\left(A_1, \overline{A_1}\right)$, on a :

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(A_2) \\ &= \frac{b}{b+r} \times \frac{b+1}{b+r+1} + \left(1 - \frac{b}{b+r}\right) \times \frac{b}{b+r+1} = \frac{b(b+1+r)}{(b+r)(b+r+1)} = \frac{b}{b+r}, \end{aligned}$$

la probabilité $P_{\overline{A_1}}(A_2)$ étant obtenue par un raisonnement similaire à ce qui précède.
On en déduit que :

$$\boxed{P(A_2) = \frac{b}{b+r}.}$$

3. Notons $E = \{k \in \mathbb{N},\ P(B_{n,k}) > 0\}$.
Initialement, l'urne contient b boules blanches. À chaque tirage, on peut obtenir une boule blanche ou une boule rouge donc au cours de n tirages, on ajoute 0 boule blanche dans le cas extrême où l'on ne tire que des boules rouges, n boules blanches dans le cas extrême où l'on ne tire que des boules blanches. Le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du tirage numéro n est donc un entier compris entre b et $n+b$.
Ainsi, $E \subset [\![b, b+n]\!]$ (car si $k \notin [\![b, b+n]\!]$ alors $B_{n,k} = \varnothing$ donc $P(B_{n,k}) = 0$).
Montrons maintenant l'inclusion $[\![b, b+n]\!] \subset E$.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$. L'événement $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} \overline{A_i}$ est inclus dans $B_{n,k}$ donc $\displaystyle P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} \overline{A_i}\right) \leqslant P(B_{n,k})$.
Or, par la formule des probabilités composées, on a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} \overline{A_i}\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \ldots \times P_{\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i}(A_k) \times P_{\bigcap_{i=1}^{k} A_i}(\overline{A_{k+1}}) \times \ldots \times P_{\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap \bigcap_{i=k+1}^{n-1} \overline{A_i}}(\overline{A_n}).$$

Or, chacune des probabilités du produit ci-dessus est strictement positive car elle est égale, par équiprobabilité, au quotient du nombre de boules blanches (ou rouges) par le nombre total de boules contenues dans l'urne lors d'un certain tirage et il y a toujours des boules blanches et des boules rouges dans l'urne.

Ainsi, $P(B_{n,k}) \geqslant P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} \overline{A_i}\right) > 0$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \{k \in \mathbb{N},\ P(B_{n,k}) > 0\} = [\![b, n+b]\!].}$$

4. Soit $k \in [\![b, n+b]\!]$. On suppose que l'événement $B_{n,k}$ est réalisé ce qui signifie qu'après les n premiers tirages, l'urne contient k boules blanches.
Avant le $(n+1)$-ème tirage, l'urne contient alors k boules blanches et $b+r+n$ boules au total (puisqu'on ajoute 1 boule à chaque tirage donc n boules après n tirages).
Par équiprobabilité, on en déduit que :

$$\boxed{P(A_{n+1}|B_{n,k}) = \frac{k}{b+r+n}.}$$

5. Par la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $\left(B_{n,k}\right)_{k\in[\![b,n+b]\!]}$ (après n tirages, l'urne contient un nombre de boules blanches compris entre b et $n+b$ donc un et seul des événements $B_{n,k}$ se réalise), on obtient :

$$P(A_{n+1}) = \sum_{k=b}^{n+b} P(B_{n,k}) \times P_{B_{n,k}}(A_{n+1}) = \sum_{k=b}^{n+b} P(B_{n,k}) \times \frac{k}{b+r+n} = \frac{1}{b+r+n} \sum_{k=b}^{n+b} kP(B_{n,k}).$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(A_{n+1}) = \frac{1}{b+r+n} \sum_{k=b}^{n+b} kP(B_{n,k}).}$$

7. L'événement $B_{n,1}$ est l'événement « L'urne contient 1 boule blanche après n tirages ».
Il se réalise donc si et seulement si les n premiers tirages donnent des boules rouges.
Ainsi :

$$\boxed{B_{n,1} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}.}$$

8. On a $P(B_{1,1}) = P(\overline{A_1}) = \dfrac{1}{2}$. On suppose désormais $n \geqslant 2$.
D'après la formule des probabilités composées, on a alors :

$$P(B_{n,1}) = P(\overline{A_1}) \prod_{k=1}^{n-1} P_{\overline{A_1}\cap\ldots\cap\overline{A_k}}(\overline{A_{k+1}}) = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1+k}{2+k}.$$

En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si l'on a tiré que des boules rouges aux k premiers tirages alors on a ajouté k boules rouges dans l'urne donc avant le $(k+1)$-ème tirage, l'urne contient $1+k$ boules rouges et $2+k$ boules au total.
Par télescopage, on en déduit que $P(B_{n,1}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{2+(n-1)} = \dfrac{1}{n+1}$.

$$\boxed{P(B_{n,1}) = \frac{1}{n+1}.}$$

9. On suppose que l'événement $B_{n,\ell}$ est réalisé, ce qui signifie qu'avant le $(n+1)$-ème tirage, l'urne contient ℓ boules blanches.
Avant le $(n+1)$-ème tirage, l'urne contient par ailleurs $2+n$ boules au total (car on a ajouté une boule à chaque tirage).
On tire soit une boule blanche, soit une boule rouge au $(n+1)$-ème tirage donc après le $(n+1)$-ème tirage, l'urne ne peut contenir que $\ell+1$ ou ℓ boules blanches.
Ainsi, si $k \neq \ell+1$ et $k \neq \ell$ (ou de façon équivalente si $\ell \neq k-1$ et $\ell \neq k$) alors $P(B_{n+1,k}|B_{n,\ell}) = 0$.

Après le $(n+1)$-ème tirage, l'urne contient $\ell+1$ boules blanches si et seulement si on tire une boule blanche au $(n+1)$-ème tirage donc par équiprobabilité, on a :

$$P(B_{n+1,\ell+1}|B_{n,\ell}) = \frac{\ell}{2+n}.$$

En d'autres termes, si $k = \ell+1$ (ou de façon équivalente si $\ell = k-1$) alors $P(B_{n+1,k}|B_{n,\ell}) = \dfrac{k-1}{2+n}$.
Après le $(n+1)$-ème tirage, l'urne contient ℓ boules blanches si et seulement si on tire une boule rouge au $(n+1)$-ème tirage donc par équiprobabilité, on a :

$$P(B_{n+1,\ell}|B_{n,\ell}) = \frac{2+n-\ell}{2+n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{gathered}(i)\ P(B_{n+1,k}|B_{n,\ell}) = 0 \text{ si } \ell \notin \{k-1,k\}\ ,\ \ (ii)\ P(B_{n+1,k}|B_{n,\ell}) = \frac{k-1}{2+n} \text{ si } \ell = k-1 \\ \text{et } (iii)\ P(B_{n+1,k}|B_{n,\ell}) = \frac{2+n-k}{2+n} \text{ si } \ell = k.\end{gathered}}$$

10. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $\big(B_{n,\ell}\big)_{\ell \in [\![1,n+1]\!]}$, on a avec les résultats de la question 9 :

$$\begin{aligned}P(B_{n+1,k}) &= \sum_{\ell=1}^{n+1} P(B_{n,\ell}) \times \underbrace{P(B_{n+1,k}|B_{n,\ell})}_{=0 \text{ si } \ell\notin\{k-1,k\}} \\ &= P(B_{n,k-1}) \times P(B_{n+1,k}|B_{n,k-1}) + P(B_{n,k}) \times P(B_{n+1,k}|B_{n,k}) \\ &= P(B_{n,k-1}) \times \frac{k-1}{2+n} + P(B_{n,k}) \times \frac{2+n-k}{2+n}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![2, n+1]\!],\ P(B_{n+1,k}) = \frac{k-1}{n+2} P(B_{n,k-1}) + \frac{n+2-k}{n+2} P(B_{n,k}).}$$

11. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } \forall k \in [\![1, n+1]\!],\ P(B_{n,k}) = \frac{1}{n+1} \text{ »}.$$

Initialisation : D'après la question 8 et ce qui suit appliquée avec $n = 1$, on a :

$$P(B_{1,1}) = P(B_{1,2}) = \frac{1}{2}.$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.
D'après la question 8 et ce qui suit appliquée avec $n+1$, on a :

$$P(B_{n+1,1}) = P(B_{n+1,n+2}) = \frac{1}{n+2}.$$

Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. On a par la question 10 et l'hypothèse de récurrence ($k-1 \in [\![1, n+1]\!]$, $k \in [\![1, n+1]\!]$) :

$$\begin{aligned}P(B_{n+1,k}) &= \frac{k-1}{n+2} P(B_{n,k-1}) + \frac{n+2-k}{n+2} P(B_{n,k}) \\ &= \frac{k-1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2} \times \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On a ainsi prouvé que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ pour tout } k \in [\![1, n+1]\!],\ P(B_{n,k}) = \frac{1}{n+1}.}$$

12. D'après la question 5 appliquée avec $b = r = 1$ et la question 11, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(A_{n+1}) = \frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1} kP(B_{n,k}) = \frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1} k\frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{1}{2}.$$

On a donc établi que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $P(A_n) = \dfrac{1}{2}$.

Comme on a vu à la question 1 que $P(A_1) = \dfrac{1}{2}$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ P(A_n) = \frac{1}{2}.}$$

NB : La partie IV ne figurait pas dans le sujet CCINP initial.

13. D'après la formule des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{k-b} A_i \cap \bigcap_{i=k-b+1}^{n} \overline{A_i}\right) =& P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \cdots \times P_{A_1\cap\cdots\cap A_{k-b-1}}(A_{k-b}) \\ & \times P_{A_1\cap\cdots\cap A_{k-b}}(\overline{A_{k-b+1}}) \times P_{A_1\cap\cdots\cap A_{k-b}\cap\overline{A_{k-b+1}}}(\overline{A_{k-b+2}}) \times \\ & \cdots \times P_{A_1\cap\cdots\cap A_{k-b}\cap\overline{A_{k-b+1}}\cap\cdots\cap\overline{A_{n-1}}}(\overline{A_n}). \end{aligned}$$

En déterminant ces différentes probabilités par équiprobabilité en considérant le nombre de boules blanches et rouges présentes dans l'urne au moment du tirage, on obtient :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{k-b} A_i \cap \bigcap_{i=k-b+1}^{n} \overline{A_i}\right) =& \frac{b}{b+r} \times \frac{b+1}{b+r+1} \times \cdots \times \frac{b+k-b-1}{b+r+k-b-1} \\ & \times \frac{r}{b+r+k-b} \times \frac{r+1}{b+r+k-b+1} \times \cdots \times \frac{b+r+n-1-k}{b+r+n-1} \\ =& \frac{b}{b+r} \times \frac{b+1}{b+r+1} \times \cdots \times \frac{k-1}{r+k-1} \\ & \times \frac{r}{r+k} \times \frac{r+1}{r+k+1} \times \cdots \times \frac{b+r+n-1-k}{b+r+n-1} \\ =& \frac{rb}{b+r} \times \frac{(k-1)!}{b!} \times \frac{(b+r)!}{(r+k-1)!} \times \frac{(b+r+n-k-1)!}{r!} \times \frac{(r+k-1)!}{(b+r+n-1)!} \\ =& \frac{rb}{k(b+r)}\frac{(b+r)!}{b!r!}\frac{k!(b+r+n-k-1)!}{(b+r+n-1)!} \\ =& \frac{rb}{k(b+r)}\frac{\binom{b+r}{b}}{\binom{b+r+n-1}{k}}. \end{aligned}$$

$$\boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^{k-b} A_i \cap \bigcap_{i=k-b+1}^{n} \overline{A_i}\right) = \frac{rb}{k(b+r)}\frac{\binom{b+r}{b}}{\binom{b+r+n-1}{k}}.}$$

14. Soit $k \in [\![b+1, n+b-1]\!]$.

L'événement $B_{n,k}$ se réalise si et seulement si les n premiers tirages donnent $k-b$ boules blanches.

Ainsi, $B_{n,k}$ peut s'écrire comme l'union des événements correspondant à toutes les successions possibles de n tirages ayant donné $k-b$ boules blanches.

Ces événements étant deux à deux incompatibles, la probabilité de l'événement $B_{n,k}$ est alors la somme des probabilités de ces événements.

On a calculé à la question précédente la probabilité d'une succession de n tirages ayant donné $k-b$ boules blanches et donc $n-k+b$ boules rouges dans cet ordre.
Par un raisonnement analogue, on constate que la probabilité d'une succession donnée de n tirages ayant donné $k-b$ boules blanches et $n-k+b$ boules rouges dans un ordre quelconque est la même (peu importe l'ordre, on trouve les mêmes facteurs dans les produits).
De plus, il y a autant de successions de n tirages ayant donné $k-b$ boules blanches que de façons de choisir les numéros des $k-b$ tirages donnant des boules blanches parmi les n tirages.
Il y en a donc $\displaystyle\binom{n}{k-b}$.
On en déduit que $P(B_{n,k}) = \displaystyle\binom{n}{k-b}\frac{rb}{k(b+r)}\frac{\binom{b+r}{b}}{\binom{b+r+n-1}{k}}$.
Étudions le cas $k=b$.
On obtient par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}P(B_{n,b}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right) &= \frac{r}{b+r}\times\frac{r+1}{b+r+1}\times\cdots\times\frac{r+n-1}{b+r+n-1}\\ &= \frac{r}{b+r}\times\frac{(r+n-1)!}{r!}\times\frac{(b+r)!}{(b+r+n-1)!} = \frac{r}{b+r}\times\frac{(b+r)!}{r!b!}\times\frac{(r+n-1)!b!}{(b+r+n-1)!} = \frac{r}{b+r}\frac{\binom{b+r}{b}}{\binom{b+r+n-1}{b}}.\end{aligned}$$

On constate que la formule obtenue précédemment est donc encore valable pour $k=b$.
Enfin, dans le cas où $k=n+b$, on trouve par symétrie que :

$$P(B_{n,n+b}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right) = \frac{b}{b+r}\frac{\binom{b+r}{r}}{\binom{b+r+n-1}{r}} = \frac{b}{b+r}\frac{\binom{b+r}{b}}{\binom{b+r+n-1}{b+n-1}} = \frac{b}{b+r}\frac{\binom{b+r}{b}}{\frac{b+n}{r}\binom{b+r+n-1}{b+n}} = \frac{rb}{(n+b)(b+r)}\frac{\binom{b+r}{b}}{\binom{b+r+n-1}{b+n}}$$

donc la formule est aussi valable pour $k=n+b$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k\in[\![b,n+b]\!],\ P(B_{n,k}) = \binom{n}{k-b}\frac{rb}{k(b+r)}\frac{\binom{b+r}{b}}{\binom{b+r+n-1}{k}}.}$$

Problème 2 *Centrale PC 2023*
1. Comme $|x|<1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ donc $\displaystyle\left|\frac{nx^n}{1-x^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} n|x|^n$.
Par ailleurs, on sait que la série entière $\sum nt^n$ a même rayon de convergence que la série entière $\sum t^n$, qui est la série géométrique, d'où $R\left(\sum nt^n\right)=1$.
Par convergence absolue sur l'intervalle ouvert de convergence, on en déduit que la série $\sum n|x|^n$ converge.
Comme on a de plus pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\left|\frac{nx^n}{1-x^n}\right|\geqslant 0$, on en déduit par comparaison par équivalent que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\frac{nx^n}{1-x^n} \text{ converge (absolument).}}$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme $|x|^n<1$, la série géométrique $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}(x^n)^k$ converge et a pour somme $\displaystyle\frac{x^n}{1-x^n}$ donc on a par glissement d'indice (et linéarité) :

$$\frac{nx^n}{1-x^n} = n\sum_{k=1}^{+\infty}x^{nk} = \sum_{k=0}^{+\infty}nx^{n(k+1)}.$$

Ainsi, par somme (série convergente par ce qui précède) :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}nx^{n(k+1)}.}$$

2. En appliquant la question précédente avec $y = |x| \in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |nx^{n(k+1)}| = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} n|x|^{n(k+1)} = \sum_{n=1} \frac{n|x|^n}{1-|x|^n} < +\infty$$

donc par le résultat admis (deuxième point) appliqué à la famille $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$, où pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, $a_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ nx^{n(k+1)} & \text{sinon} \end{cases}$, on en déduit que la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n(k+1)}$ existe (ce qui signifie notamment que toutes les séries en jeu convergent) et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n(k+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(k+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}.$$

Or, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{k+1} \sum_{n=1}^{+\infty} n(x^{k+1})^{n-1}.$$

On sait que pour tout $t \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ et par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}.$$

En appliquant ce résultat pour tout $k\in\mathbb{N}$, avec $x^{k+1} \in]-1,1[$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(x^{k+1})^{n-1} = \frac{1}{(1-x^{k+1})^2}.$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{k+1}}{(1-x^{k+1})^2}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(1-x^{k+1})^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}$.

Par un glissement d'indice ($p = k+1$), on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{p\geqslant 1} \frac{x^p}{(1-x^p)^2} \text{ converge et } \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{(1-x^p)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}.}$$

3. On a $\displaystyle\frac{1}{k^3(k+1)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^4}$.

De plus, la série de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^4}$ est convergente ($4 > 1$) et à termes positifs.

On en déduit par comparaison par équivalent que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^3(k+1)}$ converge.

La nature de la série ne dépendant pas des premiers termes, on en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = n\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)} \text{ est bien défini (et c'est un réel positif).}}$$

4. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, on peut calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Montrons que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n < +\infty$.

On a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n}{k^3(k+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}$$

où pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, $a_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{n}{k^3(k+1)} & \text{si } 1 \leqslant n \leqslant k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Par le résultat admis (premier point), comme pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, $a_{n,k} \geqslant 0$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k} \frac{n}{k^3(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}\frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} < +\infty.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{12}.}$$

5. Soit $i \in \mathbb{N}$. La série $\displaystyle\sum_{j\geqslant i+1} b_{i,j} = \sum_{j\geqslant i+1} \frac{2^i}{2^j}$ converge car il s'agit, à une constante multiplicative près, d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$.
On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} b_{i,j}$ converge et on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{j=0}^{i-1} b_{i,j} + b_{i,i} + \sum_{j=i+1}^{+\infty} b_{i,j} = -1 + 2^i \sum_{j=i+1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = -1 + 2^i \frac{1/2^{i+1}}{1-1/2} = -1 + 1 = 0.$$

Il est alors clair que la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} \sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ converge puisque son terme général est nul et que sa somme vaut 0.
Ainsi :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} \text{ existe et } \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = 0.}$$

6. Soit $j \in \mathbb{N}$. La série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} b_{i,j}$ est convergente car son terme général est nul à partir d'un certain rang (donc la suite des sommes partielles est constante à partir d'un certain rang) et on a (résultat valable aussi pour $j = 0$ même si la première somme pose un problème d'indice) :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{i=0}^{j-1} b_{i,j} + b_{j,j} + \sum_{i=j+1}^{+\infty} b_{i,j} = \frac{1}{2^j} \sum_{i=0}^{j-1} 2^i - 1 = \frac{1}{2^j} \frac{1-2^j}{1-2} - 1 = -\frac{1}{2^j}.$$

La série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} \sum_{i=0}^{+\infty}$ est alors une série convergente car il s'agit d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ et on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = -\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = -\frac{1}{1-1/2} = -2.$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} \text{ existe et } \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} = -2.}$$

7. On constate que :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} \neq \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}.}$$

La famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ n'est donc pas sommable.

8. Soit $i \in \mathbb{N}$. La série $\displaystyle\sum_{j\geqslant i+1} c_{i,j} = \sum_{j\geqslant i+1} \frac{-2i3^i}{3^j}$ converge car il s'agit, à une constante multiplicative près, d'une série géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$.
On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} c_{i,j}$ converge et on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j} = \sum_{j=0}^{i-1} c_{i,j} + c_{i,i} + \sum_{j=i+1}^{+\infty} c_{i,j} = i - 2i3^i \sum_{j=i+1}^{+\infty} \frac{1}{3^j} = i - 2i3^i \frac{1/3^{i+1}}{1-1/3} = i - i = 0.$$

Il est alors clair que la série $\sum_{i\geqslant 0}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$ converge puisque son terme général est nul et que sa somme vaut 0.
Ainsi :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j} \text{ existe et } \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j} = 0.}$$

9. La série $\sum_{i\geqslant 0} c_{i,j}$ est convergente car son terme général est nul à partir d'un certain rang.
Si $j = 0$ alors $\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = c_{0,0} + \sum_{i=1}^{+\infty} c_{i,0} = 0$ et pour tout $j \geqslant 1$:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \sum_{i=0}^{j-1} c_{i,j} + c_{j,j} + \sum_{i=j+1}^{+\infty} c_{i,j} = -\frac{2}{3^j}\sum_{i=0}^{j-1} i3^i + j.$$

Ainsi, si $j = 1$ alors $\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = 1$ et pour tout $j \geqslant 2$ (comme $3 \neq 1$) :

$$\sum_{i=0}^{j-1} i3^i = \sum_{i=1}^{j-1}\sum_{k=1}^{i} 3^i = \sum_{1\leqslant k\leqslant i\leqslant j-1} 3^i = \sum_{k=1}^{j-1}\sum_{i=k}^{j-1} 3^i = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{3^k - 3^j}{1-3} = -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{j-1} 3^k - \sum_{k=1}^{j-1} 3^j\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3-3^j}{1-3} - (j-1)3^j\right)$$

d'où :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{3^j}\left(\frac{3^j-3}{2} - (j-1)3^j\right) + j = \frac{1-3^{1-j}}{2} - j + 1 + j = \frac{3-3^{1-j}}{2} = \frac{1}{2}\frac{3^j-1}{3^{j-1}}.$$

N.B. : Pour calculer $\sum_{i=0}^{j-1} i3^i$, on pouvait aussi considérer la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{j-1} x^i = \frac{1-x^j}{1-x}$$

et obtenir par dérivation que pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f'(x) = \sum_{i=1}^{j-1} ix^{i-1} = \dfrac{-jx^{j-1}(1-x) + (1-x^j)}{(1-x)^2}$.
Il ne reste plus qu'à multiplier par x et évaluer en $x = 3$.

Remarquons que le résultat obtenu est encore valable dans les cas $j = 0$ et $j = 1$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{i\geqslant 0} c_{i,j} \text{ converge et on a } \sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2}\frac{3^j-1}{3^{j-1}}.}$$

10. On a $\dfrac{1}{2}\dfrac{3^j-1}{3^{j-1}} \underset{j\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\dfrac{3^j}{3^{j-1}} = \dfrac{3}{2}$.
On en déduit que $\lim\limits_{j\to+\infty} \dfrac{1}{2}\dfrac{3^j-1}{3^{j-1}} = \dfrac{3}{2}$ donc :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{j\geqslant 0}\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} \text{ diverge grossièrement.}}$$

11. L'événement A_n se réalise si et seulement si lors des $2n$ premiers lancers, il y a eu n piles.
Comme $X_1 + \cdots + X_{2n}$ compte le nombre de piles obtenus lors des $2n$ premiers lancers, on en déduit que :

$$\boxed{A_n = [X_1 + \cdots + X_{2n} = n].}$$

Comme pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, la variable X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p et les variables $X_1, \ldots, X_{2n}$ sont indépendantes, on en déduit que la variable $X_1 + \ldots + X_{2n}$ suit la loi binômiale de

paramètre $2n$ et p.
On en déduit que :

$$P(X_1 + \cdots + X_{2n} = n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^{2n-n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{P(A_n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.}$$

12. Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $m < n$.
On a $B_m \cap B_n = \varnothing$ car si B_m se réalise alors la première fois qu'il y a autant de piles que de faces, c'est à l'issue des $2m$ premiers lancers et comme $2m < 2n$, il ne peut pas y avoir autant de piles que de faces *pour la première fois* à l'issue des $2n$ premiers lancers donc B_n ne peut pas se réaliser.
Ainsi :

$$\boxed{\text{les événements } (B_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ sont incompatibles.}}$$

13. Il ne peut y avoir autant de piles que de faces qu'au bout d'un nombre pair de lancers.
Ainsi, l'événement C se réalise si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A_n se réalise
ou encore si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que B_n se réalise.
On en déduit que $C = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n est un événement, on a $B_n \in \mathscr{A}$.
Par stabilité de la tribu $\mathscr{A}$ par union dénombrable, on en déduit que $C \in \mathscr{A}$ c'est-à-dire :

$$\boxed{C \text{ est un événement.}}$$

De plus, comme les événements B_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, sont deux à deux incompatibles, on a par σ-additivité :

$$\boxed{P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n).}$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \cap A_n$ et comme les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont deux à deux incompatibles, on a par σ-additivité :

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k \cap A_n).$$

Justification 1 : On a $P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) P_{B_k}(A_n)$.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On suppose que l'événement B_k est réalisé, ce qui signifie notamment qu'au bout de $2k$ lancers, il y a autant de piles que de faces.
L'événement A_n se réalise alors si et seulement si les lancers, du $(2k+1)$-ème au $2n$-ème, donnent autant de piles que de faces. Comme il y a $2(n-k)$ lancers entre le $(2k+1)$-ème et le $2n$-ème, on en déduit que :

$$P_{B_k}(A_n) = P(A_{n-k}).$$

Justification 2 (plus rigoureuse) : Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $S_m = \sum_{i=1}^{2m} X_i$.
On a :

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k \cap A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k \cap [S_{2n} = n]) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k \cap [S_{2n} - S_{2k} = n-k])$$

car si B_k est réalisé alors S_{2k} prend la valeur k.
Or, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $S_{2n} - S_{2k} = \sum_{i=2k+1}^{2n} X_i$.

Par indépendance des lancers (et lemme des coalitions), on a alors l'indépendance des événements B_k et $[S_{2n} - S_{2k} = n - k]$ d'où :

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(S_{2n} - S_{2k} = n - k).$$

On peut alors montrer que comme les variables X_i pour $i \in \mathbb{N}^*$ suivent toutes la même loi et sont indépendantes, les $2(n-k)$ uplets $(X_{2k+1}, \dots, X_{2n})$ et $(X_1, \dots, X_{2(n-k)})$ suivent la même loi et donc par somme :

$$\sum_{i=2k+1}^{2n} X_i \text{ et } \sum_{i=1}^{2(n-k)} X_i = S_{2(n-k)} \text{ suivent la même loi.}$$

Ainsi :

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(S_{2(n-k)} = n - k) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A_{n-k}).$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A_{n-k}).}$$

15. Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } P(B_n) = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}(p(1-p))^n \text{ ».}$$

Initialisation : On a par la question précédente :

$$P(A_1) = P(B_1)P(A_0) = P(B_1) \text{ et } P(A_1) = 2p(1-p)$$

par la question 11.
On en déduit que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.
On a alors par la question précédente :

$$P(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A_{n+1-k}) + P(B_{n+1})P(A_0)$$

donc en utilisant la question 11 et l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned}
P(B_{n+1}) &= \binom{2(n+1)}{n+1}(p(1-p))^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1}(p(1-p))^k \binom{2(n+1-k)}{n+1-k}(p(1-p))^{n+1-k} \\
&= \binom{2(n+1)}{n+1}(p(1-p))^{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}(p(1-p))^{n+1} \\
&= (p(1-p))^{n+1}\left(\binom{2(n+1)}{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} + \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}\right) \\
&= (p(1-p))^{n+1}\left(\binom{2(n+1)}{n+1} - \binom{2n+2}{n+1} + \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}\right) \\
&= \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}(p(1-p))^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On a donc prouvé que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ P(B_n) = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}(p(1-p))^n.}$$

16. D'après les questions 13 et 15, on a :

$$P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}(p(1-p))^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}(p(1-p))^{n+1} = 2p(1-p) \times \frac{1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p(1-p)}$$

car $p(1-p) \in]0,1/4[$ (puisque la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ est strictement croissante sur $[0,1/2]$, strictement décroissante sur $[1/2,1]$, $f(0)=f(1)=0$ et $f(1/2)=1/4$).
Ainsi :

$$\boxed{\text{si } p \neq \frac{1}{2} \text{ alors } P(C) = 1-\sqrt{1-4p(1-p)}.}$$

17. Pour $p = \dfrac{1}{2}$, on a comme précédemment :

$$P(C) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}(p(1-p))^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^{n+1}}.$$

Posons $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}(x(1-x))^{n+1}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{2}{n+1}\dbinom{2n}{n}(x(1-x))^{n+1}$ est continue sur $[0,\frac{1}{2}]$ (fonction polynômiale).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f_n\|_{[0,1/2]}^{\infty} = \dfrac{2}{n+1}\dbinom{2n}{n}\dfrac{1}{4^{n+1}}$ par positivité et croissance de f_n sur $[0,1/2]$.
Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^{n+1}} = \sum_{n\geqslant 1} P(B_n)$ converge par σ-additivité.
On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[0,1/2]$.
Par le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions, on en déduit que S est continue sur $[0,1/2]$ et on a en particulier :

$$\lim_{x\to 1/2^-} S(x) = S(1/2).$$

Or, on a aussi comme vu précédemment, pour tout $x \in]0,1/2[$, $S(x) = 1-\sqrt{1-4x(1-x)}$ donc :

$$\lim_{x\to 1/2^-} S(x) = 1.$$

On en déduit que $S(1/2)=1$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{si } p = \frac{1}{2} \text{ alors } P(C) = 1.}$$