DM11 (Variables aléatoires discrètes)
À rendre le lundi 4 mars

Problème 1 (sujet CCINP) - Un jeu de société

Présentation générale

On considère deux entiers $M \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $A \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'un plateau de jeu infini sur lequel se trouve un parcours composé de cases numérotées par les entiers naturels. Un pion se trouve initialement sur la case numérotée 0 et il doit atteindre ou dépasser la case numérotée A pour terminer le jeu. À chaque tour de jeu, le joueur utilise un ordinateur qui génère aléatoirement et uniformément un élément de l'ensemble $[\![0, M-1]\!]$: le pion est avancé d'autant de cases que le nombre généré.

Dans la suite, on s'intéresse tout particulièrement au nombre de tours de jeu nécessaire pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée A.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, M-1]\!]$. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

On considère la variable aléatoire T définie de la façon suivante :
1. si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n < A$, alors on pose $T = 0$;
2. sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n \geqslant A\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'espérance de la variable aléatoire T dans deux cas particuliers.

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

Dans cette sous-partie, on effectue le lien entre la situation présentée dans l'introduction et le modèle considéré ci-dessus.

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que représentent les variables aléatoires X_n et S_n dans le contexte de la situation présentée ?

Q2. Que représente la variable aléatoire T ?

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

On considère la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Q3. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

Q4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant p} \binom{n}{p} x^n$ est égal à 1.

Q5. Soit $p \in \mathbb{N}$. En développant la fonction f en série entière, déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $M = 2$.

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Q7. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire T ?

Q8. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$. Exprimer l'évènement $(T = k)$ en fonction des évènements $(S_{k-1} = A - 1)$ et $(X_k = 1)$. En déduire que :

$$P(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}.$$

Q9. Calculer $P(T = 0)$.

Il.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On déduit des résultats précédents que la fonction génératrice G_T de la variable aléatoire T est égale à la somme de la série entière $\sum\limits_{k \geqslant A} P(T = k) x^k$ sur son intervalle de convergence.

Q10. Déterminer la rayon de convergence R_T de la série entière $\sum\limits_{k \geqslant A} P(T = k) x^k$ et montrer que :

$$\forall x \in]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A.$$

Q11. En déduire le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie.

Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leqslant M$.

III. 1 - Calcul de la probabilité $P(S_n \leqslant k)$

Dans cette sous-partie, on pourra librement utiliser la formule suivante :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n+k-\ell}{n} = \binom{n+1+k}{n+1}.$$

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant le système complet d'évènements $((X_{n+1} = 0), \ldots, (X_{n+1} = M-1))$, montrer que :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k-\ell).$$

Q13. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}.$$

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On rappelle le résultat suivant qui pourra être utilisé librement dans la suite : si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} P(Z > n)$ converge, alors Z admet une espérance et on a l'égalité :

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z > n).$$

Q14. Que peut-on dire des évènements $(T > n)$ et $(S_n < A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?
En déduire que la variable aléatoire T admet une espérance et calculer sa valeur.

Problème 2 (sujet Centrale) - Loi Zêta et arithmétique

Rappels d'arithmétique

On rappelle ici quelques propriétés élémentaires d'arithmétique.

— Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$, on dit que a divise b s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = ka$.
On dit aussi que a est un diviseur de b, ou encore que b est multiple de a.
Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on note $a\mathbb{N}^*$ l'ensemble des multiples de a dans $\mathbb{N}^*$.
Ainsi a divise b si et seulement si $b \in a\mathbb{N}^*$.

— Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$, le plus grand commun diviseur (PGCD) de a et b est l'entier naturel noté $a \wedge b$ tel que

$$a \wedge b = \max\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n \text{ divise } a \text{ et } n \text{ divise } b\}.$$

— Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'équivalence

$$n \text{ divise } a \wedge b \Leftrightarrow n \text{ divise } a \text{ et } n \text{ divise } b.$$

— On dit qu'un entier naturel p supérieur ou égal à 2 est un nombre premier si ses seuls diviseurs sont 1 et p.
Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle que $\mathscr{P}$ est infini.
On note $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Ainsi, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.

— Si $n \in \mathbb{N}^*$, si $q_1, \ldots, q_n$ sont des nombres premiers distincts, alors pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on a l'équivalence

$$(\forall i \in [\![1, n]\!], \quad q_i \text{ divise } a) \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} q_i \text{ divise } a.$$

— Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \geqslant 2$, il existe $p \in \mathscr{P}$ tel que p divise a.

A - Loi zêta

Q1. On note $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Donner l'ensemble de définition de la fonction ζ.

Q2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$.
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{\alpha}{n^x}.$$

Justifier que $\alpha = \dfrac{1}{\zeta(x)}$.

On dira dans ce cas que la variable aléatoire X suit la loi de probabilité zêta de paramètre x.

Dans les questions suivantes de cette partie A, on suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre $x > 1$.

Q3. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X soit d'espérance finie. Exprimer alors cette espérance à l'aide de ζ.

Q4. Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X^k soit d'espérance finie. Exprimer alors $E(X^k)$ à l'aide de ζ.

Q5. En déduire la variance de X.

Q6. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $P(X \in a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^x}$.

B - Indépendance

Soit x un réel tel que $x > 1$ et soit X une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre x.
Soit enfin $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathscr{P}^n$, un n-uplet de nombres premiers distincts.

Q7. Montrer que les événements $(X \in q_1\mathbb{N}^*), \ldots, (X \in q_n\mathbb{N}^*)$ indépendants.

Cela entraine, et on ne demande pas de le démontrer, que leurs complémentaires sont indépendants.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} (X \notin p_k\mathbb{N}^*)$.

Q8. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P(X = 1)$. En déduire que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right).$$

C - Deux variables indépendantes suivant une loi zêta

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de probabilité zêta de paramètre x.
Soit A l'événement « Aucun nombre premier ne divise X et Y simultanément ».
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n l'événement

$$C_n = \bigcap_{k=1}^{n} ((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*)).$$

Q9. Exprimer l'événement A à l'aide des événements C_n. En déduire que

$$P(A) = \frac{1}{\zeta(2x)}.$$

D - Deux variables indépendantes suivant une loi uniforme

Soient U_n et V_n deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
On note $W_n = U_n \wedge V_n$.

Q10. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2.$$

On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(P(W_n = k))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ_k.

Q11. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \geqslant M \Rightarrow 1 - \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{m} \ell_k \leqslant 1.$$

Q12. En déduire que $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ (hors programme : il suffit pour cela de vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ell_k \geqslant 0$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \ell_k = 1$).

On note W une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ qui suit cette loi de probabilité.

En adaptant la méthode de la question 11, on peut établir que, pour toute partie B de $\mathbb{N}^*$, $P(W \in B) = \lim_{n\to+\infty} P(W_n \in B)$. On ne demande pas de démontrer ce résultat.
Enfin, on admet le résultat suivant : si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $P(X \in a\mathbb{N}^*) = P(Y \in a\mathbb{N}^*)$, alors X et Y ont la même loi de probabilité.

Q13. Préciser la loi de W. En considérant ℓ_1, que peut-on alors en conclure ?

Problème 3 (sujet Mines) - Variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion

Dans tout le sujet, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « variable aléatoire » pour parler d'une variable aléatoire discrète, et « variable aléatoire entière » pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Définition 1 (Dispersion d'ordre α)
On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On dit que X ***vérifie la condition*** *$(\mathscr{D}_\alpha)$ - dite de dispersion d'ordre α - lorsque, quand n tend vers $+\infty$,*

$$P(|X| \geqslant n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{1}$$

Définition 2 (Variables aléatoires symétriques)
On dit que X est ***symétrique*** *lorsque $-X$ suit la même loi que X, autrement dit lorsque*

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = P(X = -x). \tag{2}$$

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires entières, indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition $(\mathscr{D}_\alpha)$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

appelée n-ième moyenne empirique des variables X_k. L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables M_n.

Questions de cours

Q1. Soit X une variable aléatoire. Rappeler la définition de « X est d'espérance finie ».
Montrer alors que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.

Q2. Soit X une variable aléatoire. Montrer que si X est bornée, autrement dit s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $P(|X| \leqslant M) = 1$, alors X est d'espérance finie.

Généralités sur les variables aléatoires

Q3. Soit X une variable aléatoire entière vérifiant $(\mathscr{D}_\alpha)$. Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.

Q4. Soit X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $E(f(X)) = 0$.

Q5. Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de (X, Y), démontrer que $X + Y$ est symétrique.

Sujet tronqué : On admet pour la suite que pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$, les deux séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ *et* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ *convergent et on a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique X. On pose

$$\Phi_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto E(\cos(tX)), \end{cases}$$

appelée fonction caractéristique de X.

Q6. Montrer que Φ_X est bien définie, paire et que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\Phi_X(t)| \leqslant 1$.

Q7. En utilisant le théorème de transfert, montrer que Φ_X est continue.
Indication : On pourra considérer deux cas : le cas où $X(\Omega)$ est fini et le cas où $X(\Omega)$ est dénombrable en notant $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition $(\mathscr{D}_\alpha)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$R_n := P(|X| \geqslant n).$$

Q8. On fixe $t \in]0, 2\pi[$. Montrer successivement que

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$$

puis

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \left[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right].$$

On pourra établir au préalable la convergence de la série $\sum_n R_n \cos(nt)$.

Q9. Montrer qu'il existe un nombre réel C tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} C,$$

et en déduire que, quand t tend vers 0^+,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln(t)) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\alpha}{2} + o(1).$$

Q10. Conclure que, quand t tend vers 0^+,

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\alpha}{2} t + o(t).$$

La fonction Φ_X est-elle dérivable en 0 ?

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

Q11. Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

Q12. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable M_n est symétrique et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t/n)\right)^n.$$

Q13. En déduire que pour tout réel t,

$$\Phi_{M_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right).$$

Q14. La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

A partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $\frac{\pi\alpha}{2}$, ce qui signifie que pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$,

$$P(a \leqslant M_n \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{2}\int_a^b \frac{du}{u^2+(\pi\alpha/2)^2}.$$

Problème 4 (sujet ENS)

Ce sujet s'intéresse aux matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1, et en particulier à la différence maximale entre le nombre de 1 et le nombre de -1 que l'on peut obtenir, si l'on autorise à multiplier certaines lignes et colonnes d'une telle matrice par -1.

La partie I s'intéresse à quelques cas particuliers. La partie II montre que pour certaines matrices, cette différence maximale est beaucoup plus petite que n^2.

Notations

Pour n et k entiers strictement positifs, on notera $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et k colonnes. On notera également $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n. On notera $M^\top$ la transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$. On identifiera l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ à l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à n coordonnées. En particulier, l'espace vectoriel des nombres réels est identifié à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

On étend les notations précédentes aux parties de $\mathbb{R}$: si K est une partie de $\mathbb{R}$, on notera par exemple $\mathcal{M}_{n,k}(K)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ constitué des matrices dont tous les coefficients sont à valeurs dans K. Le sujet s'intéresse tout particulièrement à $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, l'ensemble des matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1. Si $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, on notera :

$$S(A) := \{X^\top AY \,|\, (X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2\}$$
$$M(A) := \max S(A).$$

Pour $n \geqslant 1$, on notera également

$$\underline{M}(n) := \min\{M(A),\ A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})\}.$$

Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires intervenant dans la partie II. On admettra que toutes les variables aléatoires introduites peuvent être construites sur cet espace. On notera $P(E)$ la probabilité d'un événement $E \subset \Omega$, et $E[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs réelles.

Partie I

Q1. Quel est le cardinal de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$? Cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Q2. Montrer que pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, l'ensemble $S(A)$ est inclus dans $\{-n^2, \cdots, n^2\}$. Montrer que l'inclusion est stricte (on pourra penser à un argument de parité), et montrer que $S(A)$ est un ensemble symétrique, au sens où un entier k est dans $S(A)$ si et seulement si $-k$ est dans $S(A)$.

Q3. Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. On suppose qu'il existe des matrices diagonales C et D ne contenant que des 1 et des -1 sur la diagonale, telles que $B = CAD$. Montrer que $S(A) = S(B)$.

Q4. Dans cette question, on suppose $n = 2$, et on note

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $S(I)$ et $S(J)$, et en déduire $S(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\{-1,1\})$.

Q5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

(a) $n^2 \in S(A)$.

(b) Il existe X et Y dans $\{-1,1\}^n$ tels que $A = XY^\top$.

(c) A est de rang 1.

Q6. En déduire la proportion, parmi les matrices de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, des matrices A qui vérifient $n^2 \in S(A)$.

Partie II

Soit k un entier strictement positif et $U_1, \ldots, U_k$ une suite de k variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$, indépendantes et de loi uniforme. On note également

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} U_i.$$

Q7. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(\lambda) = \ln(E[e^{\lambda U_1}])$. Etablir que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(\lambda) \leqslant \frac{\lambda^2}{2}.$$

Q8. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a l'inégalité

$$P(S_k \geqslant t) \leqslant \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t).$$

Q9. En déduire l'inégalité de Hoeffding pour S_k : pour tout $t > 0$, on a

$$P(S_k \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right).$$

On introduit maintenant une variable aléatoire uniforme $C : \Omega \to \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. Pour $\omega \in \Omega$, on note $C_{i,j}(\omega)$ les coefficients de la matrice $C(\omega)$.

Q10. Soient $X = (x_1, \cdots, x_n)$ et $Y = (y_1, \cdots, y_n)$ deux vecteurs quelconques dans $\{-1,1\}^n$. Montrer que $(x_i y_j C_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une famille de n^2 variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$, indépendantes et de loi uniforme.

Q11. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$P(M(C) \geqslant t n^{3/2}) \leqslant \exp\left(-\left(\frac{t^2}{2} - 2\ln 2\right) n\right).$$

Q12. On rappelle la notation $\underline{M}(n) = \min\{M(A) \mid A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})\}$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\underline{M}(n) \leqslant 2\sqrt{\ln 2}\, n^{3/2}.$$

Indication :
On pourra commencer par montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ telle que

$$M(A) \leqslant (2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon) n^{3/2}.$$