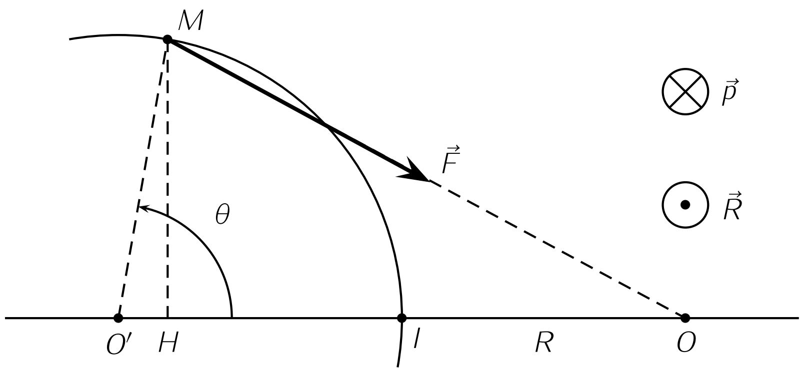
Équilibre en mécanique.

1. Expression de OM en fonction de R et θ :

Contentez vous de recopier la partie "utile" du schéma mais tracez une figure



— le triangle MHO étant triangle en H, on a $OM^2 = OH^2 + HM^2$ (relation 1).
— le triangle MHO' étant triangle en H on a aussi $\sin\theta = \frac{HM}{O'M}$ d'où $HM = R\sin\theta$ (relation 2)
— de même, $O'H = R\cos\theta = O'O - HO = 2R - HO$ d'où $HO = R(2 - \cos\theta)$ (relation 3).

En utilisant les relations (2) et (3) dans (1),

$$OM^2 = R^2(2-\cos\theta)^2 + R^2\sin^2\theta = R^2(4 - 4\cos\theta + \cos^2\theta) + R^2\sin^2\theta$$

avec $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ d'où $\boxed{OM = R\sqrt{5 - 4\cos\theta}}$ (toujours défini).

2. Les forces présentes sont :
— le poids du point matériel mais comme le cercle est horizontal, cette force ne travaille pas, l'énergie potentielle de pesanteur est constante et on la prend nulle.
— la réaction du cercle mais elle reste perpendiculaire au déplacement car il n'y a pas de frottement : ne travaille pas.
— la force de rappel du ressort qui dérive de l'énergie potentielle $E_{p,él}$.

Placez les forces sur la figure et préparez la réponse suivante, déjà lue, en citant les forces conservatives

3. Ici, la seule force conservative qui travaille est la force de rappel élastique du ressort et on a donc $E_p = E_{p,él} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$ avec $l = OM \Rightarrow \boxed{E_p = \frac{1}{2}k\left[R\sqrt{5-4\cos\theta} - l_0\right]^2}$

L'expression $E_{p,él} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$ n'est pas à démontrer

4. Pour déterminer les positions d'équilibre de ce système conservatif de paramètre θ, on utilise l'égalité $\frac{dE_p(\theta)}{d\theta} = 0$, vérifiée par les positions d'équilibre.

Il faut bien entendu utiliser les résultats en amont

Ici, cette équation devient :

$$\frac{d}{d\theta}\left[(R\sqrt{5-4\cos\theta} - l_0)^2\right] = 0 \Rightarrow 2(R\sqrt{5-4\cos\theta} - l_0) \times \frac{R}{2\sqrt{5-4\cos\theta}} \times 4\sin\theta = 0$$

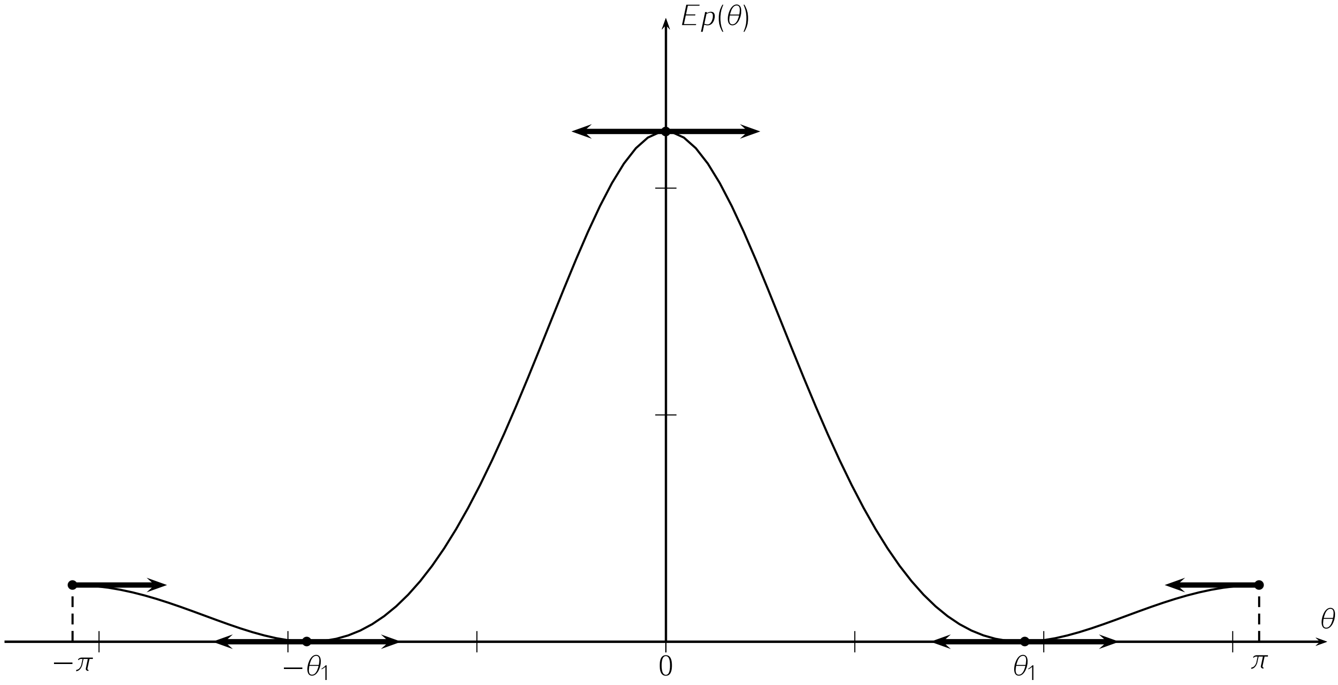
Ce produit s'annule si un des termes au numérateur est nul. On peut donc avoir,

- $\sin\theta = 0$ d'où $\boxed{\theta = 0\ ,\ M \text{ en } I}$ ou $\boxed{\theta = \pm\pi\ ,\ M \text{ en } I'}$ ou alors
- $R\sqrt{5-4\cos\theta} - l_0 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{4}\left[5 - \frac{l_0^2}{R^2}\right]$, positions définies si $-1 \leq \frac{1}{4}\left[5 - \frac{l_0^2}{R^2}\right] \leq 1 \Rightarrow -4-5 \leq -\frac{l_0^2}{R^2} \leq 4-5 \Rightarrow 1 \leq \frac{l_0^2}{R^2} \leq 9 \Rightarrow R \leq l_0 \leq 3R$.

  Finalement, $\boxed{\text{si } R \leq l_0 \leq 3R}$, il y a aussi les deux positions $\boxed{\theta = \pm \arccos \frac{1}{4}\left[5 - \frac{l_0^2}{R^2}\right]}$

Vérifiez au moins au brouillon la cohérence des conditions

5. Pour donner l'allure du graphe $E_p(\theta)$ lorsque $l_0 = \frac{5}{2}R$ on peut tracer $(\sqrt{5-4\cos\theta} - 2.5)^2$ en fonction de θ sur l'intervalle $-\pi \leq \theta \leq \pi$) car $E_p(\theta)$ sera proportionnelle à cette fonction.



6. $\boxed{\theta = 0 \text{ et } \theta = \pm\pi \text{ sont des positions d'équilibre instables}}$ (maxima de $E_p(\theta)$), elles correspondent respectivement à M en I avec le ressort comprimé et M en I' avec le ressort tendu.

   Précisez la position de M sur le cercle

   On repère également $\boxed{\text{deux positions d'équilibres stables } \theta_1 \text{ et } -\theta_1}$ (minima de $E_p(\theta)$) symétriques, elles correspondent aux valeurs de θ telles que $l = OM = l_0$.

   D'ailleurs, en reportant dans la relation obtenue en 1., on obtient bien $OM = l_0 = R\sqrt{5-4\cos\theta} \Rightarrow \theta = \pm \arccos \frac{1}{4}\left[5 - \frac{l_0^2}{R^2}\right] = \pm \arccos \frac{1}{4}\left[5 - \frac{25}{4}\right] = \pm \arccos \frac{-5}{16} \simeq \pm 108°$.
7. Si on augmente OI en maintenant le même rayon pour le cercle, les positions d'équilibre stables vont disparaître, et $\theta = 0$ deviendra une position d'équilibre stable.

Vive les loopings !

1. (a) Théorème de l'énergie mécanique : la variation d'énergie cinétique d'un **point** matériel entre deux instants est égale, dans un référentiel **galiléen**, au travail de la résultante des forces non conservatives qui lui
Q1 sont appliquées entre ces deux instants.

$$\Delta E_m = E_{m,2} - E_{m,1} = W_{nc,1\to 2}(\vec{F})$$

Attention à la notation Δ qui est source d'erreur, préférez $E_{m,2} - E_{m,1}$.

> ***Un théorème sans hypothèses ne vaut aucun point (demandez à votre enseignant de mathématiques).***

(b) Système : la bille ; bilan des forces : force du ressort (conservative), poids (ne travaille pas car mouvement horizontal pour cette question), réaction du support (idem). Référentiel terrestre, lié à la piste, considéré comme galiléen.

> ***Définissez le système mécanique + bilan des forces***

Les hypothèses du théorème étant vérifiées (système ponctuel et référentiel galiléen), on peut appliquer le théorème énoncé ci-dessus. Puisque seule la force du ressort travaille et qu'elle est conservative, alors $W_{nc} = 0$.

> ***Lorsque vous appliquez un théorème, montrez que vous avez vérifié ses conditions d'application même si les hypothèses sont vérifiées de façon évidentes.***

On considère l'instant initial où le ressort est comprimé et la bille lâchée sans vitesse initiale, l'énergie mécanique est donc $E_{m,1} = \frac{1}{2}m \times 0^2 + \frac{1}{2}kd^2$.

On considère comme instant final le moment où la bille quitte le ressort, le ressort est donc à une élongation nulle. On en déduit $E_{m,2} = \frac{1}{2}m \times v_0^2 + \frac{1}{2}k \times 0^2$.

> ***Définissez précisément le système, l'instant 1 et l'instant 2, un schéma peut aider.***

Q2 D'après le théorème de l'énergie mécanique, on a donc $\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$, d'où $\boxed{d = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}}$.

Q3 (c) Application numérique : $d = 4\sqrt{\frac{10^{-2}}{4\times 10^2}} = 4\sqrt{\frac{\times 10^{-4}}{4}} = \boxed{2\times 10^{-2}\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{cm}}$.

> ***attention aux unités !***

2. (a) Théorème de l'énergie cinétique : la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale, dans un référentiel galiléen, au travail de la résultante des forces qui lui sont appliquées
Q4 entre ces deux instants.

$$\Delta E_c = E_{c,2} - E_{c,1} = W_{1\to 2}(\vec{F})$$

> ***Travail de toutes les forces, pas seulement des forces conservatives !***

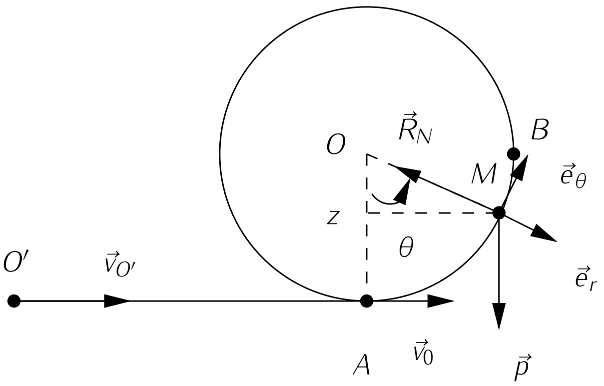
(b) Analyse qualitative du signe : puisque l'on monte entre A et B et que $\vec{p}$ est dirigé vers le bas, alors il « résiste ». Son travail doit donc être $\boxed{\text{négatif}}$, ce qui nous permettra de vérifier le signe de notre calcul.

Analyse quantitative : on utilise l'énergie potentielle pour calculer facilement le travail du poids. L'expression $\vec{p}\cdot\overrightarrow{AB}$ est ici tout à fait juste mais pas très pratique à utiliser directement, à moins de décomposer $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

L'énoncé ne définit pas d'axe vertical, si vous voulez en utilisez un, il vous faut le définir.

Soit Oz un axe ascendant, on a alors $E_p = +mgz$ une fonction croissante de z (E_p augmente quand z augmente) et le travail du poids est simplement $W = -\Delta E_p = -(mgz_M - mgz_A) = mg(z_A - z_M)$ on trouve bien un travail $\boxed{\text{négatif}}$. Exprimons le en fonction des données du problème : $z_A = -R$ et
Q5 $z_M = -R\cos\theta$ d'où le travail $\boxed{W = -mgR(1-\cos\theta) = mgR(\cos\theta - 1)}$

Il était demandé de vérifier le signe du poids, faites le ! Pour cela, faites une analyse qualitative à part. Je vous conseille de la faire avant pour ne pas être influencé par le résultat de votre calcul.



(c) Par application du théorème précédent sur la bille entre les positions A et M, on peut écrire

$$\Delta E_c = W(\vec{p}) + W(\vec{R})$$

or $\vec{R}_N$ la réaction du support est perpendiculaire au déplacement à tout instant, son travail est nul et le travail du poids a déjà été calculé. On a ainsi

$$\Delta E_c = W = -\Delta E_{p,\text{pes}} + 0 \iff \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = -mgR(1-\cos\theta) \Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)$$

Q6 et $\underline{\text{si } v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta) \geq 0}$, alors $\boxed{v = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)}.}$

3. Principe fondamental de la dynamique : dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, la résultante des forces qui s'exercent sur un point matériel est égale à la dérivée temporelle du vecteur quantité de mouvement dans $\mathcal{R}_g$.
(Si vous considérez un système **fermé** de points, alors il suffit de considérer la somme des forces extérieures, mais il faut parler de l'accélération du centre de masse, l'accélération "du système" n'a pas de sens.)
Et par application sur la bille, dans le système de coordonnées polaires,

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

On a par ailleurs $\vec{p} = mg\cos\theta\vec{e}_r - mg\sin\theta\vec{e}_\theta$ et $\vec{R}_N = -R_N\vec{e}_r$, soit :

$$m\vec{a} = \vec{p} + \vec{R}_N \Rightarrow -mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - R_N \iff R_N = mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2 \text{ par projection sur } (OM)$$

Et en utilisant $v^2 = R^2\dot{\theta}^2 \iff \dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{R^2}[v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)]$, on obtient

$$R_N = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) + \frac{mv_0^2}{R} \Rightarrow \boxed{R_N = mg(3\cos\theta - 2) + \frac{mv_0^2}{R}}$$

Q7

4. (a) La bille effectue un tour complet si elle reste $\boxed{\text{toujours}}$ en contact avec le rail ($\forall\theta; R_N > 0$) $\boxed{et}$ si sa
Q8 vitesse est non nulle ($v > 0$) tout au long du mouvement (deux conditions).

- R_N est minimale pour $\theta = \pi$ (c'est à dire au point C) et

$$\forall\,\theta; R_N > 0 \iff R_N(\theta=\pi) > 0 \iff mg(-3-2) + \frac{mv_0^2}{R} > 0 \iff v_0^2 > 5gR \Rightarrow v_0 > \sqrt{5gR}$$

- De même, v est minimale pour $\theta = \pi$ et

$$v(\theta=\pi) > 0 \iff -2gR(1-\cos\pi) + v_0^2 > 0 \iff v_0^2 > 4gR \Rightarrow v_0 > 2\sqrt{gR}$$

Conclusion : il faut que $\boxed{v_0 > \sqrt{5gR}.}$

(b) La condition précédente est équivalente à $\boxed{R < \frac{v_0^2}{5g}}$.

Numériquement $\frac{v_0^2}{5g} = \frac{4^2}{5\times 10} = \frac{16}{5}\frac{1}{10}$ or $16 = 15+1$, d'où $16/5 = 3{,}2$. On en déduit $\boxed{R < 32\,\text{cm}}$. Ce qui
Q9 fait quand même un beau looping ! (diamètre de 64 cm).

(c) Si $v_0 < \sqrt{5gR}$, la bille va soit rebrousser chemin si elle s'arrête à $\theta = \theta_a < \frac{\pi}{2}$, soit décoller du rail si
Q10 elle s'arrête en $\theta = \theta_a > \frac{\pi}{2}$.

Elle s'arrêtera en $\theta_a = \frac{\pi}{2}$ si $v(\theta = \frac{\pi}{2}) = 0 \iff v_0^2 - 2gR(1-0) = 0$ soit $v_0 = \sqrt{2gR}$.

Conclusion, la bille rebrousse chemin si $\boxed{v_0 < \sqrt{2gR}}$ et dans le cas général, elle s'arrêtera en $\theta = \theta_a$ tel que $v(\theta=\theta_a) = 0 \iff v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta_a) = 0$ soit $\boxed{\theta_a = \arccos(1 - \frac{v_0^2}{2gR})}$.

(d) Si $\boxed{\sqrt{2gR} < v_0 < \sqrt{5gR}}$, v s'annulerait pour $\theta > \frac{\pi}{2}$ mais en fait, la bille décolle en $\theta = \theta_d$ tel que
Q11 $R_N(\theta=\theta_d) = 0 \iff \frac{v_0^2}{R} + g(3\cos\theta_d - 2) = 0$ soit $\boxed{\theta_d = \arccos(\frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3gR}).}$

5. (a) Pour établir l'équation différentielle du mouvement pour θ croissant ($\dot\theta > 0$), en présence de

$$R_T = \mu R_N = \mu\left[mg\cos\theta + \frac{mv^2}{R}\right]$$

on peut utiliser le théorème de l'énergie mécanique : $\frac{dE_m}{dt} = P_{\text{nc}}$ avec $E_m = E_c + E_p$ soit ici $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2 + mgR(1-\cos\theta)$ et P_{nc} la puissance des forces non conservatives, c'est à dire R_T : $P_{\text{nc}} = \vec{R}_T.\vec{v} = -R_T R\dot\theta$ d'où :

$$mR^2\ddot\theta\dot\theta + mgR\sin\theta\dot\theta = -\mu\left[mg\cos\theta + \frac{mv^2}{R}\right]R\dot\theta \Rightarrow \boxed{\ddot\theta + \mu\dot\theta^2 = -\frac{g}{R}\sin\theta - \frac{\mu g}{R}\cos\theta}$$

Q12 après simplification par $\dot\theta$ non nul à chaque instant si on écarte la solution triviale.

(b) En posant $\dot\theta^2 = (\frac{d\theta}{dt})^2 = f(\theta)$, $\frac{df(\theta)}{d\theta} = \frac{df(\theta)}{dt}\times\frac{dt}{d\theta} = \frac{d\dot\theta^2}{dt}\times\frac{1}{\dot\theta} = 2\ddot\theta\dot\theta\times\frac{1}{\dot\theta} = 2\ddot\theta$ et on a effectivement
Q13 $\frac{df(\theta)}{d\theta} + \alpha f(\theta) = \beta\cos\theta + \gamma\sin\theta$ en posant $\alpha = 2\mu$, $\beta = -\frac{2g}{R}$ et $\gamma = -\frac{2\mu g}{R}$.

(c) La solution de cette équation est la somme $sol_P + sol_H$ avec sol_H la solution de l'équation homogène sans second membre, de la forme $f(\theta) = C_0.e^{-2\mu\theta}$ et sol_P la solution particulière de la forme $f(\theta) = C_1\cos\theta + C_2\sin\theta$. En injectant la solution particulière dans l'équation différentielle, on obtient : $-C_1\sin\theta + C_2\cos\theta + \alpha C_1\cos\theta + \alpha C_2\sin\theta = \beta\cos\theta + \gamma\sin\theta$ et par identification, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} -C_1 + \alpha C_2 &=& \gamma \\ C_2 + \alpha C_1 &=& \beta \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} C_1 &=& \frac{\alpha\beta-\gamma}{1+\alpha^2} \\ C_2 &=& \frac{\alpha\gamma+\beta}{1+\alpha^2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} C_1 &=& \frac{2g}{R}\frac{1-2\mu^2}{1+4\mu^2} \\ C_2 &=& -\frac{6\mu g}{R}\frac{1}{1+4\mu^2} \end{array}$$

et en $\theta = 0$, c'est à dire en A, $v = R\dot\theta = v_0$ soit $\dot\theta(\theta=0) = \frac{v_0}{R}$ et

$$f(\theta=0) = \dot\theta^2(\theta=0) = \frac{v_0^2}{R^2} = C_0 + C_1$$

Q14 soit $\boxed{C_0 = \frac{v_0^2}{R^2} - C_1}$ et $\boxed{f = \dot\theta^2 = C_0 e^{-2\mu g} + C_1\cos\theta + C_2\sin\theta}$.

(d) La bille arrive en $B(\theta = \frac{\pi}{2})$ si $\dot{\theta}(\theta = \frac{\pi}{2}) > 0$ et à la limite $C_0 e^{-\mu\pi} + C_2 = 0 \iff C_0 = C_2 e^{\mu\pi}$ avec
Q15 $C_0 = \frac{v_0^2}{R^2} - C_1$, il faut donc que $\boxed{v_0 \geq R\sqrt{C_1 - C_2 e^{\mu\pi}}}$ pour que la bille arrive en B.