DM11 (Variables aléatoires discrètes)
Corrigé

Problème 1 (CCINP PC 2023)

Partie I

Q1. La variable aléatoire X_n représente le nombre généré par l'ordinateur au tour de jeu numéro n, c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{le nombre de cases dont le pion avance au tour de jeu numéro } n.}$$

La variable aléatoire S_n représente le nombre de cases dont a avancé le pion après n tours de jeu, ou encore :

$$\boxed{\text{le numéro de la case où se trouve le pion après } n \text{ tours de jeu}}.$$

Q2. La variable aléatoire T est le nombre de tours de jeu nécessaire pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée A (pour la première fois), c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{le nombre de tours nécessaire pour que le jeu se termine}}$$

(T prend par convention la valeur 0 lorsque le jeu ne se termine jamais).

Q3. En tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-1,1[$,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-1,1[.}$$

Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathscr{P}(p) : \text{« } \forall x \in]-1,1[,\ f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} \text{ ».}$$

Initialisation : Pour $p = 0$, on a pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{0!}{(1-x)^{0+1}}$.
Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(p)$ est vraie.
On a donc pour tout $x \in]-1,1[$, $f^{(p)}(x) = p!(1-x)^{-p-1}$.
Par dérivation, on obtient pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f^{(p+1)}(x) = \left(f^{(p)}\right)'(x) = p! \times (-1) \times (-p-1)(1-x)^{-p-2} = \frac{p!(p+1)}{(1-x)^{p+2}} = \frac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}}.$$

Ainsi, $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } x \in]-1,1[,\ f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.}$$

Q4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant p$, on pose $a_n = \binom{n}{p}$.
On a pour tout $n \geqslant p$, $a_n \neq 0$ et :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} \times \frac{p!(n-p)!}{n!} = \frac{n+1}{n+1-p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On en déduit par la règle de d'Alembert que :

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum_{n\geqslant p} \binom{n}{p} x^n \text{ est } \tfrac{1}{1} = 1.}$$

Q5. On sait que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ (série géométrique).
Par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on obtient en dérivant p fois :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p}.$$

Par la question 3, on en déduit que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

d'où, en multipliant par $\dfrac{x^p}{p!}$:

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.}$$

Partie II

Q6. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, X_k suit la loi uniforme sur $\{0,1\}$ qui est la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
Ces variables étant de plus indépendantes, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ suit la loi binômiale de paramètres } n \text{ et } \frac{1}{2}.}$$

Q7. Comme le pion avance d'au plus une case à chaque tour de jeu, il faut au moins A tours de jeu pour atteindre la case A.
Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$. Si pour tout $i \in [\![1, k-A]\!]$, X_i prend la valeur 0 et pour tout $i \in [\![k-A+1, k]\!]$, X_i prend la valeur 1 alors T prend la valeur k.
Comme de plus, T peut prendre la valeur 0, par exemple lorsque pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, X_i prend la valeur 0 (car le pion reste toujours sur la case 0), on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire } T \text{ est } T(\Omega) = \{k \in \mathbb{N},\ k \geqslant A\} \cup \{0\}.}$$

Q8. Comme le pion se déplace ici de 0 ou 1 case à chaque tour de jeu, l'événement $(T = k)$ se réalise si et seulement si le pion atteint la case A pour la première fois au tour de jeu numéro k. Pour cela, il faut et il suffit que le pion se trouve sur la case $A-1$ au tour de jeu numéro $k-1$ et qu'il se déplace d'une case au tour de jeu numéro k, ce qui est équivalent à la réalisation de l'événement $(S_{k-1} = A-1) \cap (X_k = 1)$.
Ainsi :

$$\boxed{(T = k) = (S_{k-1} = A-1) \cap (X_k = 1).}$$

Par le lemme des coalitions, les variables aléatoires $S_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} X_i$ et X_k sont indépendantes donc les événements $(S_{k-1} = A-1)$ et $(X_k = 1)$ sont indépendants et on a alors :

$$P(T=k) = P(S_{k-1} = A-1) \times P(X_k = 1) = \binom{k-1}{A-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^k}.$$

En effet, si $k-1 = 0$ alors nécessairement, $A-1 = 0$ donc dans ce cas, on a

$$P(S_{k-1} = A-1) = P(\Omega) = 1 = \binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^{k-1}}$$

et si $k-1 \in \mathbb{N}^*$ alors d'après la question 6, $S_{k-1} \sim \mathscr{B}(k-1, \frac{1}{2})$ et $A-1 \in [\![0, k-1]\!]$) donc on a :

$$P(S_{k-1} = A-1) = \binom{k-1}{A-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{A-1}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{(k-1)-(A-1)} = \binom{k-1}{A-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{P(T=k) = \binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^k}.}$$

Q9. Comme $((T=k))_{k\in T(\Omega)}$ est un système (quasi-)complet d'événements, on a $\sum_{k\in T(\Omega)} P(T=k) = 1$ donc :

$$P(T=0) = 1 - \sum_{k=A}^{+\infty}\binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^k} = 1 - \sum_{n=A-1}^{+\infty}\binom{n}{A-1}\frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=A-1}^{+\infty}\binom{n}{A-1}\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2}\frac{(1/2)^{A-1}}{(1-1/2)^{(A-1)+1}}$$

en utilisant la question 5 avec $p = A-1$ et $x = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi :

$$P(T=0) = 1 - \frac{(1/2)^A}{(1/2)^A} = 1-1 = 0.$$

$$\boxed{P(T=0) = 0 \text{ donc l'événement } (T=0) \text{ est négligeable, le jeu s'arrête presque sûrement.}}$$

Q10. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$, on pose $b_k = \binom{k-1}{A-1}\dfrac{1}{2^k}$.
On a pour tout $k \geqslant A$, $b_k \neq 0$ et :

$$\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \frac{k!}{(A-1)!(k-A+1)!} \times \frac{(A-1)!(k-A)!}{(k-1)!}\frac{1}{2} = \frac{k}{k-A+1}\frac{1}{2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k}{2k} = \frac{1}{2} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

On en déduit par la règle de d'Alembert que :

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum_{k\geqslant A} P(T=k)x^k \text{ est } R_T = \tfrac{1}{1/2} = 2.}$$

Pour tout $x \in]-2, 2[$, on a :

$$G_T(x) = \sum_{k=A}^{+\infty} P(T=k)x^k = \sum_{k=A}^{+\infty}\binom{k-1}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{n=A-1}^{+\infty}\binom{n}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} = \frac{x}{2}\sum_{n=A-1}^{+\infty}\binom{n}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{x}{2}\frac{(x/2)^{A-1}}{(1-x/2)^A}$$

en utilisant la question 5 avec $p = A-1$ et $\dfrac{x}{2} \in]-1, 1[$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-2, 2[,\ G_T(x) = \frac{(x/2)^A}{(1-x/2)^A} = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A.}$$

Q11. En tant que somme d'une série entière, la fonction G_T est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence $]-R_T, R_T[$ et $1 \in]-R_T, R_T[$ donc G_T est dérivable en 1.
Par le cours, on en déduit que T est d'espérance finie et on a $E(T) = G_T'(1)$.
Or, pour tout $x \in]-2, 2[$, on a :

$$G_T'(x) = \frac{2 - x + x}{(2-x)^2} \times A \left(\frac{x}{2-x}\right)^{A-1} \quad \text{donc } G_T'(1) = 2A.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{le nombre moyen de tours de jeu pour terminer la partie est égal à } E(T) = 2A.}$$

Partie III

Q12. Soit $k \in [\![0, A-1]\!]$. Par la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $((X_{n+1} = \ell))_{\ell \in X_{n+1}(\Omega)} = \big((X_{n+1} = 0), \ldots, (X_{n+1} = M-1)\big)$, on a :

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \sum_{\ell=0}^{M-1} P((X_{n+1} = \ell) \cap (S_{n+1} \leqslant k)) = \sum_{\ell=0}^{M-1} P((X_{n+1} = \ell) \cap (S_n \leqslant k - \ell))$$

car $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.
Or, par le lemme des coalitions, les variables aléatoires X_{n+1} et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ sont indépendantes donc pour tout $\ell \in [\![0, M-1]\!]$, les événements $(X_{n+1} = \ell)$ et $(S_n \leqslant k - \ell)$ sont indépendants d'où :

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \sum_{\ell=0}^{M-1} P(X_{n+1} = \ell) P(S_n \leqslant k - \ell) = \sum_{\ell=0}^{M-1} \frac{1}{M} P(S_n \leqslant k - \ell).$$

Enfin, comme S_n ne prend que des valeurs positives, si $k - \ell < 0$ c'est-à-dire lorsque $\ell > k$ alors $P(S_n \leqslant k - \ell) = 0$ donc on a par la relation de Chasles $(k \leqslant A - 1 \leqslant M - 1)$:

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M}\left(\sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k - \ell) + \sum_{\ell=k+1}^{M-1} 0\right) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k - \ell).$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, A-1]\!],\ P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k - \ell).}$$

Q13. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } \forall k \in [\![0, A-1]\!],\ P(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n}\binom{n+k}{n} \text{ ».}$$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $S_1 = X_1 \sim \mathscr{U}([\![0, M-1]\!])$.
Soit $k \in [\![0, A-1]\!]$. Comme $(S_1 \leqslant k) = \bigcup_{i=0}^{k} (S_1 = i)$, union d'événements 2 à 2 incompatibles, on a :

$$P(S_1 \leqslant k) = \sum_{i=0}^{k} P(S_1 = i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{M} = \frac{k+1}{M} = \frac{1}{M^1}\binom{1+k}{1}$$

(car pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $i \in [\![0, M-1]\!]$). Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Soit $k \in [\![0, A-1]\!]$. On a par la question précédente :

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k - \ell) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{M^n}\binom{n+k-\ell}{n}$$

par hypothèse de récurrence car pour tout $\ell \in [\![0, k]\!]$, $k - \ell \in [\![0, A-1]\!]$.
En utilisant le résultat annoncé en début de partie, on obtient :

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M^{n+1}}\binom{n+1+k}{n+1}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ pour tout } k \in [\![0, A-1]\!],\ P(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n}\binom{n+k}{n}.}$$

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}$.
L'événement $(S_n < A)$ se réalise si et seulement si le pion n'a pas encore atteint la case numéro A au tour de jeu numéro n c'est-à-dire si et seulement si le pion atteint la case A strictement après n tours de jeu ou s'il ne l'atteint jamais.
On a donc l'égalité :

$$\boxed{(S_n < A) = (T > n) \cup (T = 0).}$$

Les événements $(T > n)$ et $(T = 0)$ étant incompatibles, on a alors :

$$P(S_n < A) = P(T > n) + P(T = 0) = P(T > n).$$

La variable aléatoire T est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Étudions la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} P(T > n)$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(T > n) = P(S_n < A) = P(S_n \leqslant A-1) = \frac{1}{M^n}\binom{n+A-1}{n} = \frac{1}{M^n}\binom{n+A-1}{A-1}$$

par symétrie des cœfficients binômiaux.
Pour $n = 0$, on a $P(T > 0) = 1 - P(T = 0) = 1 = \dfrac{1}{M^0}\dbinom{0+A-1}{A-1}$ donc la formule est encore valable.
On a donc :

$$\sum_{n \geqslant 0} P(T > n) = \sum_{n \geqslant 0} \binom{n+A-1}{A-1}\frac{1}{M^n} = \sum_{\ell \geqslant A-1} \binom{\ell}{A-1}\frac{1}{M^{\ell-A+1}}.$$

Comme $\frac{1}{M} \in]-1, 1[$, on en déduit par les questions 4 et 5 que la série $\sum\limits_{\ell \geqslant A-1} \dbinom{\ell}{A-1}\dfrac{1}{M^\ell}$ converge et a pour somme $\dfrac{(1/M)^{A-1}}{(1-1/M)^A}$.
Par produit par $\frac{1}{M^{1-A}}$, on en déduit que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} P(T > n)$ converge et a pour somme $\left(\dfrac{M}{M-1}\right)^A$.
Par le résultat donné par l'énoncé, on en déduit que :

$$\boxed{T \text{ admet une espérance et } E(T) = \left(\frac{M}{M-1}\right)^A.}$$

Problème 2 (extrait Centrale PC 2018)

A - Loi zêta

Q1. Par le cours, la série de Riemann $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble de définition de la fonction } \zeta \text{ est }]1, +\infty[.}$$

Q2. Comme $(X = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système (quasi-)complet d'événements, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1.$$

Comme $x > 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge et a pour somme $\zeta(x)$.

On a donc $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = \alpha\zeta(x) = 1$ et nécessairement, $\zeta(x) \neq 0$ d'où :

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\zeta(x)}.}$$

Q3. Par définition, X est d'espérance finie si et seulement si $\sum_{n=1}^{+\infty} |n| P(X = n) < +\infty$.

Or :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |n| P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)} \frac{1}{n^{x-1}}.$$

La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{x-1}}$ converge si et seulement si $x - 1 > 1$ c'est-à-dire $x > 2$.

Comme $\frac{1}{\zeta(x)}$ est une constante non nulle, on en déduit que :

$$\boxed{X \text{ est d'espérance finie si et seulement si } x > 2.}$$

On a alors dans ce cas :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-1}} = \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}.$$

$$\boxed{\text{Si } x > 2 \text{ alors } E(X) = \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}.}$$

Q4. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Par le théorème du transfert, X^k est d'espérance finie si et seulement si $\sum_{n=1}^{+\infty} |n^k| P(X = n) < +\infty$.

Or :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |n^k| P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)} \frac{1}{n^{x-k}}.$$

La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{x-k}}$ converge si et seulement si $x - k > 1$ c'est-à-dire $x > k + 1$.

Comme $\frac{1}{\zeta(x)}$ est une constante non nulle, on en déduit que :

$$\boxed{X^k \text{ est d'espérance finie si et seulement si } x > k + 1.}$$

On a alors dans ce cas (toujours par le théorème du transfert) :

$$E(X^k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k P(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-k}} = \frac{\zeta(x-k)}{\zeta(x)}.$$

$$\boxed{\text{Si } x > k + 1 \text{ alors } E(X^k) = \frac{\zeta(x-k)}{\zeta(x)}.}$$

Q5. Par définition, X admet une variance si et seulement si X^2 est d'espérance finie donc par la question 4, si et seulement si $x > 3$.
Dans ce cas, on a par la formule d'Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\zeta(x-2)}{\zeta(x)} - \frac{\zeta(x-1)^2}{\zeta(x)^2}.$$

$$\boxed{X \text{ admet une variance si et seulement si } x > 3 \text{ et dans ce cas, } V(X) = \frac{\zeta(x-2)\zeta(x) - \zeta(x-1)^2}{\zeta(x)^2}.}$$

Q6. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$(X \in a\mathbb{N}^*) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = ak).$$

Les événements $(X = ak)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ étant deux à deux incompatibles, on a par σ-additivité :

$$P(X \in a\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ak) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)} \frac{1}{(ak)^x} = \frac{1}{\zeta(x)a^x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = \frac{1}{\zeta(x)a^x}\zeta(x) = \frac{1}{a^x}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } a \in \mathbb{N}^*,\ P(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^x}.}$$

B - Indépendance

Q7. Soit I un sous-ensemble non vide de $[\![1, n]\!]$.
Soit $\omega \in \Omega$. On a :

$$\omega \in \bigcap_{i \in I} (X \in q_i\mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \forall i \in I, X(\omega) \in q_i\mathbb{N}^* \Leftrightarrow \forall i \in I, q_i \text{ divise } X(\omega).$$

Comme les q_i pour $i \in I$ sont des nombres premiers distincts, on a par le rappel de l'énoncé :

$$\forall i \in I, q_i \text{ divise } X(\omega) \Leftrightarrow \prod_{i \in I} q_i \text{ divise } X(\omega) \Leftrightarrow X(\omega) \in \left(\prod_{i \in I} q_i\right)\mathbb{N}^*.$$

On a ainsi :

$$P\left(\bigcap_{i \in I} (X \in q_i\mathbb{N}^*)\right) = P\left(X \in \left(\prod_{i \in I} q_i\right)\mathbb{N}^*\right) = \frac{1}{(\prod_{i \in I} q_i)^x}$$

par la question 6.
Or, on a aussi :

$$\prod_{i \in I} P(X \in q_i\mathbb{N}^*) = \prod_{i \in I} \frac{1}{q_i^x} = \frac{1}{(\prod_{i \in I} q_i)^x}$$

d'où :

$$P\left(\bigcap_{i \in I} (X \in q_i\mathbb{N}^*)\right) = \prod_{i \in I} P(X \in q_i\mathbb{N}^*).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{les événements } (X \in q_1\mathbb{N}^*), \ldots, (X \in q_n\mathbb{N}^*) \text{ sont indépendants.}}$$

Q8. D'après la propriété de continuité décroissante, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k\mathbb{N}^*)\right).$$

Or, l'événement $\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k\mathbb{N}^*)$ se réalise si et seulement si X n'est multiple d'aucun nombre premier c'est-à-dire si et seulement si X prend la valeur 1 (d'après le rappel de l'énoncé, tout entier supérieur

ou égal à 2 est multiple d'au moins un nombre premier).
On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P(X=1).}$$

On a d'une part :

$$P(X=1) = \frac{1}{\zeta(x)}\frac{1}{1^x} = \frac{1}{\zeta(x)}$$

et d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par indépendance des événements $(X \notin p_1\mathbb{N}^*), \dots, (X \notin p_n\mathbb{N}^*)$ (par la question 7 et remarque qui suit), on a :

$$P(B_n) = \prod_{k=1}^{n} P(X \notin p_k\mathbb{N}^*) = \prod_{k=1}^{n} (1 - P(X \in p_k\mathbb{N}^*)) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)$$

par la question 6.
Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]1,+\infty[,\ \frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right).}$$

C - Deux variables indépendantes suivant une loi zêta

Q9. On a :

$$\begin{aligned}
A &= \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{(X \in p\mathbb{N}^*) \cap (Y \in p\mathbb{N}^*)} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} ((X \notin p\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p\mathbb{N}^*)) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} ((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*)) \\
&= \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=1}^{n} ((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*)) \right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n.
\end{aligned}$$

$$\boxed{A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n.}$$

La suite $(C_n)_{n\geqslant 1}$ étant décroissante (au sens de l'inclusion), on a par la propriété de continuité décroissante :

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note $D_k = (X \in p_k\mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_k\mathbb{N}^*)$.
Montrons que les événements $D_1, \dots, D_n$ sont indépendants.
Soit I un sous-ensemble non vide de $[\![1,n]\!]$.

$$P\left(\bigcap_{i\in I} D_i\right) = P\left(\bigcap_{i\in I} (X \in p_i\mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_i\mathbb{N}^*)\right) = P\left(\left(X \in \left(\prod_{i\in I} p_i\right)\mathbb{N}^*\right) \cap \left(Y \in \left(\prod_{i\in I} p_i\right)\mathbb{N}^*\right)\right)$$

donc par indépendance des variables aléatoires X et Y, on a :

$$P\left(\bigcap_{i\in I} D_i\right) = P\left(X \in \left(\prod_{i\in I} p_i\right)\mathbb{N}^*\right) \times P\left(Y \in \left(\prod_{i\in I} p_i\right)\mathbb{N}^*\right) = P\left(\bigcap_{i\in I} (X \in p_i\mathbb{N}^*)\right) \times P\left(\bigcap_{i\in I} (Y \in p_i\mathbb{N}^*)\right).$$

Par la question 7 et de nouveau l'indépendance de X et Y, on en déduit que;

$$P\left(\bigcap_{i\in I} D_i\right) = \prod_{i\in I} P(X \in p_i\mathbb{N}^*) \times \prod_{i\in I} P(Y \in p_i\mathbb{N}^*) = \prod_{i\in I} P((X \in p_i\mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_i\mathbb{N}^*)) = \prod_{i\in I} P(D_i).$$

On en déduit que les événements $\overline{D_1}, \dots, \overline{D_n}$ sont aussi indépendants.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
P(A) &= \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{D_k}\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} P\left(\overline{D_k}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - P\left((X \in p_k\mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_k\mathbb{N}^*)\right)\right) \quad \text{(en passant à l'événement contraire)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - P(X \in p_k\mathbb{N}^*)P(Y \in p_k\mathbb{N}^*)\right) \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\frac{1}{p_k^x}\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^{2x}}\right) = \frac{1}{\zeta(2x)} \quad \text{(d'après la question 8 avec } 2x > 1\text{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{\zeta(2x)}.}$$

D - Deux variables indépendantes suivant une loi uniforme

Q10. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après le troisième point admis, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$W_n(\omega) \in k\mathbb{N}^* \Leftrightarrow k \mid U_n(\omega) \wedge V_n(\omega) \Leftrightarrow k \mid U_n(\omega) \text{ et } k \mid V_n(\omega)$$

donc

$$\begin{aligned}
P(W_n \in k\mathbb{N}^*) &= P((U_n \in k\mathbb{N}^*) \cap (V_n \in k\mathbb{N}^*)) \\
&= P(U_n \in k\mathbb{N}^*)P(V_n \in k\mathbb{N}^*) \quad (U_n \text{ et } V_n \text{ sont indépendantes}) \\
&= P(U_n \in k\mathbb{N}^*)^2 \quad (U_n \text{ et } V_n \text{ suivent la même loi}).
\end{aligned}$$

Or, les entiers j de $[\![1,n]\!]$ vérifiant $k \mid j$ sont les éléments de $k\mathbb{N}^* \cap [\![1,n]\!]$, c'est-à-dire les entiers qui s'écrivent ki avec $i \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $1 \leqslant ki \leqslant n \Leftrightarrow 1 \leqslant i \leqslant n/k \Leftrightarrow 1 \leqslant i \leqslant \lfloor n/k \rfloor$ (car i est un entier).
On a donc $\{j \in [\![1,n]\!], k \mid j\} = \{ki,\ i \in [\![1, \lfloor n/k \rfloor]\!]\}$.
Enfin, comme $U_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$, on obtient :

$$P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = P(U_n \in k\mathbb{N}^*)^2 = \left(\frac{\operatorname{Card}\{ki,\ i \in [\![1, \lfloor n/k \rfloor]\!]\}}{\operatorname{Card}[\![1,n]\!]}\right)^2 = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2.$$

$$\boxed{P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2.}$$

Q11. Pour tout $n, k \in \mathbb{N}^{*2}$, $\lfloor n/k \rfloor \leqslant n/k$, donc $\dfrac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \leqslant \dfrac{1}{k}$.

- Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} \ell_k &= \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to+\infty} P(W_n = k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} P(W_n = k) \quad \text{(combinaison linéaire de limites finies)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{m} (W_n = k)\right) \quad \text{(événements incompatibles 2 à 2)}
\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \ell_k \leqslant 1$ comme limite d'une suite de probabilités.

- De plus, comme $W_n(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{m} (W_n = k)\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=m+1}^{+\infty} (W_n = k)\right)$$

et

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{k=m+1}^{+\infty}(W_n=k)\right) &\leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} P(W_n=k) \quad \text{(sous-additivité d'une probabilité)}\\
&\leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} P(W_n\in k\mathbb{N}^*) \quad (\text{car } (W_n=k)\subset(W_n\in k\mathbb{N}^*))\\
&= \sum_{k=m+1}^{+\infty}\left(\frac{\lfloor n/k\rfloor}{n}\right)^2 \quad \text{(d'après la question 10)}\\
&\leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \quad \text{(d'après le premier point de cette réponse).}
\end{aligned}
$$

Les sommes manipulées sont toutes à termes positifs.
Or, $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$ est une série convergente (Riemann et $2>1$), donc son reste tend vers 0 donc pour tout $\varepsilon>0$, il existe $M\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $m\geqslant M$, $\sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leqslant\varepsilon$.
Par suite, pour tout $m\geqslant M$, $P\left(\bigcup_{k=m+1}^{+\infty}(W_n=k)\right)\leqslant\varepsilon$, donc

$$\sum_{k=1}^{m}\ell_k = 1-P\left(\bigcup_{k=1}^{m}(W_n=k)\right)\geqslant 1-\varepsilon.$$

En mettant bout à bout la majoration (valable pour tout $m\in\mathbb{N}^*$) et la minoration obtenues pour $\sum_{k=1}^{m}\ell_k$, on obtient bien :

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\quad \exists M\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall m\in\mathbb{N}^*,\ m\geqslant M\Rightarrow 1-\varepsilon\leqslant\sum_{k=1}^{m}\ell_k\leqslant 1.}$$

Q12. • La question 11 implique

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists M\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall m\in\mathbb{N}^*,\ m\geqslant M\Rightarrow 1-\varepsilon\leqslant\sum_{k=1}^{m}\ell_k\leqslant 1+\varepsilon,$$

et donc $\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\ell_k=1$.
Par suite, la série $\sum_{k\geqslant}\ell_k$ converge et a pour somme 1.
• De plus, comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P(W_n\in k\mathbb{N}^*)\in[0,1]$, on a

$$\ell_k=\lim_{n\to+\infty}P(W_n\in k\mathbb{N}^*)\in[0,1].$$

On a donc $\sum_{k=1}^{+\infty}\ell_k=1$ et,pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\ell_k\geqslant 0$ d'où !

$$\boxed{(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ définit une loi de probabilité sur } \mathbb{N}^*.}$$

Q13. • Pour tout $n,k\in{\mathbb{N}^*}^2$,

$$n/k-1<\lfloor n/k\rfloor\leqslant n/k,\ \text{donc}\ \frac{1}{k}-\frac{1}{n}<\frac{\lfloor n/k\rfloor}{n}\leqslant\frac{1}{k}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} = \frac{1}{k}$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} = \frac{1}{k}$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2 = \frac{1}{k^2}.$$

- On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(W \in k\mathbb{N}^*) &= \lim_{n\to+\infty} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) \quad \text{(propriété admise avec } B = k\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}^*) \\ &= \frac{1}{k^2} \quad \text{(d'après le premier point de cette réponse)} \\ &= P(X \in k\mathbb{N}^*) \quad \text{où } X \text{ suit une loi zêta de paramètre 2 (d'après la question 6)} \end{aligned}$$

D'après la seconde propriété admise, W et X suivent donc la même loi de probabilité.
Ainsi :

$$\boxed{W \text{ suit la loi zêta de paramètre 2.}}$$

- On a alors $\ell_1 = P(W = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{\zeta(2)1^2} = \frac{1}{\zeta(2)}$.

Or, $P(W = k) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(W_n = 1) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n \wedge V_n = 1)$.
Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty\text{, la probabilité, quand on prend indépendamment deux nombres} \\ \text{au hasard dans } [\![1, n]\!] \text{ (loi uniforme) que ces deux nombres soient premiers entre eux,} \\ \text{tend vers } \dfrac{1}{\zeta(2)} \underset{\text{culture}}{=} \dfrac{1}{\pi^2/6} = \dfrac{6}{\pi^2}. \end{array}}$$

Problème 3 (extrait Mines PC 2021)

Q1. On suppose $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$.
Par définition, X est d'espérance finie lorsque la famille $\big(xP(X = x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable c'est-à-dire lorsque $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} |xP(X = x)| < +\infty$ ou encore lorsque $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} |x|P(X = x) < +\infty$.
Par le théorème du transfert, $|X|$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(|x|P(X = x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable c'est-à-dire si et seulement si $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} \big||x|P(X = x)\big| < +\infty$ ou encore $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} |x|P(X = x) < +\infty$.
Ainsi, on en déduit l'équivalence demandée :

$$\boxed{X \text{ est d'espérance finie si et seulement si } |X| \text{ est d'espérance finie.}}$$

Remarquons que comme $|X|(\Omega) \subset [0, +\infty]$, on peut toujours calculer l'espérance de $|X|$ et on a par le théorème du transfert :

$$E(|X|) = \sum_{x\in X(\Omega)} |x|P(X = x).$$

Ainsi, $|X|$ est d'espérance finie si et seulement si $E(|X|) < +\infty$.

Q2. On suppose que X est bornée c'est-à-dire qu'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $P(|X| \leqslant M) = 1$.
On a pour tout $x \in X(\Omega)$, $|x|P(X = x) \leqslant MP(X = x)$.
Justifions cette inégalité.
Si $|x| \leqslant M$ alors on a directement le résultat en multipliant par $P(X = x) \geqslant 0$.
Si $|x| > M$ alors $(X = x) \subset (|X| = |x|) \subset (|X| > M)$ donc par croissance, $0 \leqslant P(X = x) \leqslant P(|X| > M)$ et

$P(|X| > M) = 1 - P(|X| \leqslant M) = 0$.
On en déduit que $P(X = x) = 0$ donc l'inégalité est aussi vérifiée.
On a alors $E(|X|) = \sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X = x) \leqslant \sum_{x \in X(\Omega)} M P(X = x) = M \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = M \times 1 = M$ puisque $((X = x)_{x \in X(\Omega)}$ est un système (quasi-)complet d'événements.
On a donc $E(|X|) < +\infty$ donc X est d'espérance finie d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est bornée alors } X \text{ est d'espérance finie.}}$$

Q3. On a $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ donc $|X|(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
Par le cours, on a alors $E(|X|) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(|X| \geqslant n)$.
Comme X vérifie $\mathscr{D}_\alpha$, on a $P(|X| \geqslant n) = \dfrac{\alpha}{n} + \underset{n \to +\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $P(|X| \geqslant n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n}$.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(|X| \geqslant n) \geqslant 0$ et la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{\alpha}{n}$ diverge (série harmonique et $\alpha \neq 0$), on en déduit par comparaison que la série $\sum_{n \geqslant 1} P(|X| \geqslant n)$ diverge.
Ainsi, $E(|X|) = +\infty$ et donc par la question 1, on en déduit que :

$$\boxed{X \text{ n'est pas d'espérance finie.}}$$

On sait par le cours que si X^2 est d'espérance finie alors X est d'espérance finie.
Par contraposée, on en déduit que :

$$\boxed{X^2 \text{ n'est pas d'espérance finie.}}$$

Q4. Comme X est symétrique, on a $-X \sim X$ donc en appliquant la fonction f, on a $f(-X) \sim f(X)$.
Or, f est impaire donc on a $f(-X) = -f(X)$
(car pour tout $\omega \in \Omega$, $f(-X)(\omega) = f(-X(\omega)) = -f(X(\omega)) = -f(X)(\omega)$).
On a donc $-f(X) \sim f(X)$ donc $\boxed{f(X) \text{ est symétrique.}}$
Si $f(X)$ est d'espérance finie, alors comme $f(X)$ et $-f(X)$ ont même loi, elles ont la même espérance d'où :

$$E(f(X)) = E(-f(X)) = -E(f(X)) \text{ par linéarité d'où } E(f(X)) = 0.$$

$$\boxed{\text{Si } f(X) \text{ est d'espérance finie alors } E(f(X)) = 0.}$$

Q5. Montrons que $(-X, -Y)$ et (X, Y) ont la même loi.
Comme X et Y sont symétriques, on a $(-X)(\Omega) = X(\Omega)$ et $(-Y)(\Omega) = Y(\Omega)$.
Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} P((-X = x) \cap (-Y = y)) &= P(-X = x) \times P(-Y = y) \text{ (car } -X \text{ et } -Y \text{ sont indépendantes)} \\ &= P(X = x) \times P(Y = y) \text{ (car } X \text{ et } Y \text{ sont symétriques)} \\ &= P((X = x) \cap (Y = y)) \text{ (car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes).} \end{aligned}$$

On en déduit que $(-X, -Y) \sim (X, Y)$.
En appliquant la fonction $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto & a + b \end{array} \right.$, on en déduit que $u(-X, -Y) = -X - Y = -(X + Y)$ et $u(X, Y) = X + Y$ ont la même loi.
Ainsi :

$$\boxed{X + Y \text{ est symétrique.}}$$

Q6. Soit $t \in \mathbb{R}$.
On a $|\cos(tX)| \leqslant 1$ (car pour tout $\omega \in \Omega$, $|\cos(tX(\omega))| \leqslant 1$) donc la variable aléatoire $\cos(tX)$ est bornée. Par la question 2., on en déduit qu'elle est d'espérance finie donc $E(\cos(tX))$ existe.
De plus, comme $-1 \leqslant \cos(tX) \leqslant 1$, on a par croissance de l'espérance, $E(-1) \leqslant E(\cos(tX)) \leqslant E(1)$ c'est-à-dire $-1 \leqslant \Phi_X(t) \leqslant 1$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \Phi_X \text{ est bien définie et vérifie pour tout } t \in \mathbb{R},\ |\Phi_X(t)| \leqslant 1.}$$

Comme cos est paire, on a pour tout $\omega \in \Omega$, $\cos(-tX(\omega)) = \cos(tX(\omega))$ donc $\cos(-tX) = \cos(tX)$.
Ainsi, $\Phi_X(-t) = E(\cos(-tX)) = E(\cos(tX)) = \Phi_X(t)$. Donc :

$$\boxed{\text{la fonction } \Phi_X \text{ est paire.}}$$

Q7. $\boxed{\textit{Cas } X(\Omega) \textit{ fini}}$
On a par le théorème du transfert, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) = \sum_{x \in X(\Omega)} \cos(tx)P(X = x)$ (somme finie).
Comme pour tout $x \in X(\Omega)$, $t \mapsto \cos(tx)P(X = x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, par somme (finie), la fonction Φ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textit{Cas } X(\Omega) \textit{ dénombrable, } X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}}$
On a par le théorème du transfert, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(tx_n)P(X = x_n)$ (somme de série absolument convergente).
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \cos(tx_n)P(X = x_n)$.
⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f_n(t)| \leqslant P(X = x_n)$ (ne dépend pas de t).
Ainsi, $P(X = x_n)$ est un majorant de l'ensemble $\{|f_n(t)|,\ t \in \mathbb{R}\}$ et $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ est le plus petit des majorants de cet ensemble donc $0 \leqslant \|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant P(X = x_n)$.
Comme la série $\sum_{n \geqslant 0} P(X = x_n)$ converge (par σ-additivité), on en déduit par comparaison par inégalité que la série $\sum_{n \geqslant 0} \|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge.
Ainsi, la série $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } \Phi_X \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Q8. ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$R_n - R_{n+1} = P(|X| \geqslant n) - P((|X| \geqslant n) \cap (|X| \geqslant n+1)) = P((|X| \geqslant n) \setminus (|X| \geqslant n+1)) = P(|X| = n)$$

puisque $|X|$ est à valeurs entières.
Comme $\cos(t|X|)$ est bornée, $\cos(t|X|)$ est d'espérance finie. Comme $|X|(\Omega) \subset \mathbb{N}$, par le théorème du transfert :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(|X| = n)\cos(tn) = E(\cos(t|X|)) = E(\cos(tX)) = \Phi_X(t).$$

En effet, considérons $\omega \in \Omega$.
Si $X(\omega) \geqslant 0$ alors $|X|(\omega) = X(\omega)$ donc $\cos(t|X|(\omega)) = \cos(tX(\omega))$
et si $X(\omega) < 0$ alors $|X|(\omega) = -X(\omega)$ donc $\cos(t|X|(\omega)) = \cos(-tX(\omega)) = \cos(tX(\omega))$.
Ainsi, $\cos(t|X|) = \cos(tX)$ d'où $E(\cos(t|X|)) = E(\cos(tX))$.
On en déduit que :

$$\boxed{\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(R_n - R_{n+1})\cos(nt).}$$

$\star$ Montrons la convergence de la série $\sum_n R_n \cos(nt)$.

Comme X vérifie la condition $(\mathscr{D}_\alpha)$, on a $R_n \cos(nt) = \alpha \dfrac{\cos(nt)}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ ($(\cos(nt))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée).
On sait de plus par le résultat admis que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\cos(nt)}{n}$ converge (car $t \in]0, 2\pi[$) et $\sum_{n\geqslant 1} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge par comparaison (car la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est à termes positifs et converge puisque $2 > 1$).
Par linéarité, on en déduit que la série $\sum_n R_n \cos(nt)$ converge.
Comme la série $\sum_n (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$ converge également, on obtient par linéarité que la série $\sum_n R_{n+1} \cos(nt)$ converge aussi.
On a alors :

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n \cos(nt) - \sum_{n=0}^{+\infty} R_{n+1} \cos(nt) = R_0 \cos(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) - \sum_{m=1}^{+\infty} R_m \cos((m-1)t)$$

en posant $m = n+1$. Comme $P(|X| \geqslant 0) = 1$, on obtient :

$$\boxed{\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \big(\cos(nt) - \cos((n-1)t)\big).}$$

Q9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n : t \mapsto \left(R_n - \dfrac{\alpha}{n}\right) e^{int}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue sur $\mathbb{R}$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|g_n(t)| = \left|R_n - \dfrac{\alpha}{n}\right|$ (ne dépend pas de t).
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|g_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \left|R_n - \dfrac{\alpha}{n}\right| = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car X vérifie la condition $(\mathscr{D}_\alpha)$.
Par comparaison avec la série à termes positifs et convergente $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$, on obtient que la série $\sum_{n\geqslant 1} \|g_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge.
Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions, on en déduit que la fonction $S : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \dfrac{\alpha}{n}\right) e^{int}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier en 0 d'où $\lim_{t\to 0^+} S(t) = S(0)$.
En d'autres termes, $\lim_{t\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \dfrac{\alpha}{n}\right) e^{int} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \dfrac{\alpha}{n}\right)$.
En notant C le réel $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \dfrac{\alpha}{n}\right)$, on a donc :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} C.}$$

En considérant les parties réelles et imaginaires, on a donc puisque $C \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) \cos(nt) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} C \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) \sin(nt) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Toutes les séries en jeu étant convergentes avec $t \in]0, 2\pi[$, on a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right)\cos(nt) + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n} \\ &= C + \underset{t\to 0^+}{o}(1) - \alpha \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) \\ &= C + \underset{t\to 0^+}{o}(1) - \alpha \ln\left(\frac{2}{t}\sin\frac{t}{2}\right) - \alpha\ln(t) \\ &= C + \underset{t\to 0^+}{o}(1) - \alpha\ln(t).\end{aligned}$$

En effet, $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\sin(t/2)}{t/2} = 1$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} \ln\left(\dfrac{\sin\frac{t}{2}}{t/2}\right) = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\sum_{n=1}^{+\infty} R_n\cos(nt)}{\ln t} = -\alpha$ d'où :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = \underset{t\to 0^+}{O}(\ln(t)).}$$

De même, comme les séries $\sum\limits_{n\neq 1}\left(R_n - \dfrac{\alpha}{n}\right)\sin(nt)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(nt)}{n}$ convergent, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right)\sin(nt) + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \\ &= \underset{t\to 0^+}{o}(1) + \alpha\frac{\pi - t}{2} \\ &= \frac{\pi\alpha}{2} + \underset{t\to 0^+}{o}(1).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\alpha}{2} + \underset{t\to 0^+}{o}(1).}$$

Q10. D'après la question 8., on a :

$$\begin{aligned}\Phi_X(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n\big(\cos(nt) - \cos((n-1)t)\big) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n\big(\cos(nt) - \cos(nt)\cos(t) - \sin(nt)\sin(t)\big) \\ &= 1 + (1-\cos(t))\sum_{n=1}^{+\infty} R_n\cos(nt) - \sin(t)\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt)\end{aligned}$$

(toutes les séries en jeu convergent).

On a $(1-\cos(t))\sum\limits_{n=1}^{+\infty} R_n\cos(nt) = \underset{t\to 0^+}{o}(t)$.

En effet, $1 - \cos(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} R_n\cos(nt) = \underset{t\to 0^+}{O}(\ln(t))$ donc $(1-\cos(t))\sum\limits_{n=1}^{+\infty} R_n\cos(nt) = \underset{t\to 0^+}{O}(t^2\ln(t))$.

Comme $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$, on en déduit que $(1-\cos(t))\sum\limits_{n=1}^{+\infty} R_n\cos(nt) = \underset{t\to 0^+}{o}(t)$.

On a également $\sin(t)\sum\limits_{n=1}^{+\infty} R_n\sin(nt) = \dfrac{\pi\alpha}{2}t + \underset{t\to 0^+}{o}(t)$.

En effet, on a $\sin(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} R_n\sin(nt) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{\pi\alpha}{2}$ car $\dfrac{\pi\alpha}{2} \neq 0$ donc $\sin(t)\sum\limits_{n=1}^{+\infty} R_n\sin(nt) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{\pi\alpha}{2}t$.

Ainsi :

$$\boxed{\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\alpha}{2}t + \underset{t\to 0^+}{o}(t).}$$

On a $\dfrac{\Phi_X(t)-\Phi_X(0)}{t} = -\dfrac{\pi\alpha}{2} + \underset{t\to 0^+}{o}(1)$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\Phi_X(t)-\Phi_X(0)}{t} = -\dfrac{\pi\alpha}{2}$.
Ainsi, Φ_X est dérivable à droite en 0 et $(\Phi_X)'_d(0) = -\dfrac{\pi\alpha}{2}$.
Comme Φ_X est paire d'après la question 6., Φ_X est dérivable à gauche en 0 et $(\Phi_X)'_g(0) = \dfrac{\pi\alpha}{2}$.
Comme $(\Phi_X)'_d(0) \neq (\Phi_X)'_g(0)$, on en déduit que :

$$\boxed{\Phi_X \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$

Q11. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos(t(X+Y)) = \cos(tX)\cos(tY) - \sin(tX)\sin(tY).$$

Les variables aléatoires $\cos(tX)$ et $\cos(tY)$ sont indépendantes (car X et Y le sont) et elles sont d'espérance finie (d'après 2. car elles sont bornées) donc leur produit est d'espérance finie et on a :

$$E(\cos(tX)\cos(tY)) = E(\cos(tX))E(\cos(tY)).$$

En raisonnant de même avec $\sin(tX)$ et $\sin(tY)$ puis en utilisant la linéarité de l'espérance, on en déduit que :

$$E(\cos(t(X+Y))) = E(\cos(tX))E(\cos(tY)) - E(\sin(tX))E(\sin(tY)).$$

Or, $E(\sin(tX)) = E(\sin(tY)) = 0$ d'après 4. car X et Y sont symétriques, $x \mapsto \sin(tx)$ est une fonction impaire et $\sin(tX)$ et $\sin(tY)$ sont d'espérance finie.
On en déduit que :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).}$$

Q12. Notons $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est symétrique et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{S_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t)\right)^n$.
Initialisation : cas $n = 1$
$S_1 = X_1$ est symétrique et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{S_1}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t)\right)^1$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que S_n est symétrique et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{S_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t)\right)^n$.
On a $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.
Les variables aléatoires S_n et X_{n+1} sont symétriques et indépendantes (par le lemme des coalitions) donc d'après la question 5., S_{n+1} est symétrique et d'après la question 11., on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_{S_{n+1}}(t) = \Phi_{S_n}(t)\Phi_{X_{n+1}}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t)\right)^n \Phi_{X_1}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t)\right)^{n+1}$$

car X_{n+1} et X_1 suivent la même loi donc $\cos(tX_{n+1})$ et $\cos(tX_1)$ aussi donc elles ont la même espérance.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est symétrique et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{S_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t)\right)^n$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \dfrac{1}{n}S_n$ est symétrique (pour tout $x \in M_n(\Omega)$, $P(M_n = x) = P(S_n = nx) = P(S_n = -nx) = P(M_n = -x)$) et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_{M_n}(t) = E(\cos(tM_n)) = E\left(\cos\left(\frac{t}{n}S_n\right)\right) = \Phi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ M_n \text{ est symétrique et pour tout } t \in \mathbb{R},\ \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n.}$$

Q13. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.
Comme X_1 est une variable aléatoire entière symétrique et vérifiant $(\mathscr{D}_\alpha)$, on a par la question 10 :

$$\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) = 1 - \frac{\pi\alpha t}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{car } \lim_{n\to+\infty} \frac{t}{n} = 0^+.$$

Ainsi, d'après la question 12 et par composition de développements limités à l'ordre 1, on a :

$$\begin{aligned}\Phi_{M_n}(t) &= \exp\left(n\ln\left(\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{\pi\alpha t}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(n\left(-\frac{\pi\alpha t}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(-\frac{\pi\alpha t}{2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right).\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\Phi_{M_n}(t) = \exp\left(-\frac{\pi\alpha t}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right)$ par continuité de exp sur $\mathbb{R}$.
Comme Φ_{M_n} est paire d'après la question 6, on a pour tout $t\in\mathbb{R}_-^*$:

$$\lim_{n\to+\infty}\Phi_{M_n}(t) = \lim_{n\to+\infty}\Phi_{M_n}(-t) = \exp\left(-\frac{\pi\alpha(-t)}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right).$$

Enfin pour $t=0$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\Phi_{M_n}(0)=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\Phi_{M_n}(0) = 1 = \exp\left(-\frac{\pi\alpha|0|}{2}\right)$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } t\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty}\Phi_{M_n}(t) = \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right).}$$

Q14. Notons $\varphi : t\mapsto \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right)$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, comme $2n\pi\in\mathbb{R}$, on a :

$$\Phi_{M_n}(2n\pi)-\varphi(2n\pi) = (\Phi_{X_1}(2\pi))^n - \exp\left(-n\pi^2\alpha\right) = 1-\exp\left(-n\pi^2\alpha\right)$$

car X_1 est à valeurs entières donc $\cos(2\pi X_1)=1$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\exp\left(-n\pi^2\alpha\right)\right) = 1\neq 0$.
Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant|\Phi_{M_n}(2n\pi)-\varphi(2n\pi)|\leqslant\|\Phi_{M_n}-\varphi\|_\infty^{\mathbb{R}}$.
Si la suite $(\Phi_{M_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeait uniformément vers φ sur $\mathbb{R}$ alors la suite $(\Phi_{M_n}(2n\pi)-\varphi(2n\pi))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergerait vers 0 par le théorème des gendarmes.
On en déduit par l'absurde que :

$$\boxed{\text{la suite } (\Phi_{M_n})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ ne converge pas uniformément vers } \varphi \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Problème 4 (extrait ENS PC 2018)

Partie I

Q1. • En identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$, un élement de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ est un n^2-uplet d'éléments de $\{-1,1\}$.
D'où :

$$\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{M}_n(\{-1,1\})) = 2^{n^2}.}$$

• $\boxed{\mathcal{M}_n(\{-1,1\}) \text{ n'est-pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ car il ne contient pas $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Q2. • Notons $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $Y=(y_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$.
Alors $X^\top AY = \sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n x_ia_{i,j}y_j$ donc par inégalité triangulaire, on a :

$$|X^\top AY| \leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|x_ia_{i,j}y_j| = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|x_i|.|a_{i,j}|.|y_j| = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n 1 = n^2 \quad (\text{car } x_i,y_j,a_{i,j}\in\{-1,1\}).$$

Ainsi, $S(A) \subset [-n^2, n^2]$.
De plus, $X^\top AY$ est un entier (comme somme et produit d'entiers) d'où :

$$\boxed{S(A) \subset [\![-n^2, n^2]\!].}$$

• Pour tout $(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, notons

$$E = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, x_i a_{i,j} y_j = 1\}, \quad e = \mathrm{Card}(E), \quad F = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, x_i a_{i,j} y_j = -1\}, \quad f = \mathrm{Card}(F).$$

Alors il est clair que (E,F) forme une partition de $[\![1,n]\!]^2$ donc $e + f = n^2$.
De plus, $X^\top AY = e - f$ donc on a $X^\top AY = n^2 - 2f$.
On a donc $S(A) \subset \{n^2 - 2f,\ f \in [\![1,n]\!]^2\}$, ce qui prouve bien l'inclusion stricte demandée (par exemple, $n^2 - 1 \notin S(A)$).

$$\boxed{S(A) \subsetneq [\![-n^2, n^2]\!].}$$

• Enfin, si $k \in S(A)$ alors il existe $(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2$ tels que $k = X^\top AY$.
En prenant $X' = -X \in \{-1,1\}^n$, on a $X'^\top AY = -X^\top AY = -k$ donc $-k \in S(A)$.
Réciproquement, si $-k \in S(A)$ alors en appliquant ce qui précède, $-(-k) = k \in S(A)$, d'où l'équivalence.
Ainsi :

$$\boxed{S(A) \text{ est un ensemble symétrique.}}$$

Q3. Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ telles qu'il existe des matrices diagonales C et D ne contenant que des 1 et des -1 sur la diagonale, telles que $B = CAD$.
• Si $k \in S(B)$ alors il existe $(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2$ tels que $k = X^\top BY$.
Alors, en posant $X' = CX$ et $Y' = DY$, X' et Y' sont dans $\{-1,1\}^n$ (car $\{-1,1\}$ est stable par multiplication) et

$$X'^\top AY' = (CX)^\top A(DY) = X^\top C^\top ADY = X^\top CADY = X^\top BY = k,$$

donc $k \in S(A)$.
• On a $C^2 = I$ et $D^2 = I$, donc C est son propre inverse, ainsi que D.
Comme $B = CAD$, on a donc $CBD = A$ donc en reprenant le point précédent en inversant les rôles de A et B, on obtient $S(A) \subset S(B)$.

Par double inclusion, on a $\boxed{S(A) = S(B).}$

Q4. Soit $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$ deux éléments de $\{-1,1\}^2$.
• Alors $X^\top IY = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$.
Comme $(x_1 + x_2) \in \{-2,0,2\}$ et $(y_1 + y_2) \in \{-2,0,2\}$, on a $X^\top AY \in \{-4,0,4\}$.
Par suite, $S(I) \subset \{-4,0,4\}$.
De plus, pour $X = (1,1)$ et $Y = (1,1)$, $X^\top IY = 4$ donc $4 \in S(I)$.
Pour $X = (-1,1)$ et $Y = (1,1)$, $X^\top IY = 0$ donc $0 \in S(I)$.
Enfin, $S(I)$ est un ensemble symétrique donc $-4 \in S(I)$.
Ainsi :

$$\boxed{S(I) = \{-4,0,4\}.}$$

• $X^\top JY = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + -x_2y_2 = \underbrace{(x_1 + x_2)(y_1 - y_2)}_{\in\{-4,0,4\}} + \underbrace{2x_1y_2}_{\in\{-2,2\}} \in \{-6,-2,2,6\}$
donc $S(J) \subset \{-6,-2,2,6\}$ et comme on a aussi $S(J) \subset [\![-4,4]\!]$, on a $S(J) \subset \{-2,2\}$.
De plus, $2 \in S(J)$ (en prenant $X = (1,1)$ et $Y = (1,1)$), et donc $-2 \in S(J)$ (par symétrie).
Ainsi :

$$\boxed{S(J) = \{-2,2\}.}$$

• En choisissant judicieusement C et D, on peut, en effectuant le produit CAD, multiplier les lignes et les colonnes de A par 1 ou -1.
Par exemple, en prenant $C = \operatorname{diag}(1,-1)$ et $D = \operatorname{diag}(-1,1)$, on multiplie la deuxième ligne de A et la première colonne par -1 en calculant CAD. De plus, ces opérations laissent $S(A)$ inchangé (d'après la question **Q3.**).

• $\boxed{\text{Les matrices avec 0, 2 ou 4 « un » s'obtiennent en partant de } I \text{ et vérifient } S(A) = S(I) = \{-4,0,4\}.}$

Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(-1,1) I \operatorname{diag}(-1,1)$.

• $\boxed{\text{Les matrices avec 1 ou 3 « un » s'obtiennent en partant de } J \text{ et vérifient } S(A) = S(J) = \{-2,2\}.}$

Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1,-1) J \operatorname{diag}(1,-1)$.

Q5.

$\boxed{(c) \Rightarrow (b)}$ Si A est de rang 1, alors toutes les colonnes de A, notées $C_1, ..., C_n$ sont multiples de $C_1 \neq 0$.

En posant, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $C_i = y_i C_1$, on a $A = C_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}^\top = XY^\top$.

De plus, $X = C_1 \in \{-1,1\}^n$ car $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $y_i = a_{1,i}/a_{1,1} \in \{-1,1\}$, donc $Y \in \{-1,1\}^n$.

On a bien (c) $\Rightarrow$ (b).

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Si $A = XY^\top$ avec $(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2$, alors

$$X^\top A Y = X^\top (XY^\top) Y = (X^\top X)(Y^\top Y) = n \times n = n^2 \in S(A).$$

$\boxed{(a) \Rightarrow (c)}$ Si $n^2 \in S(A)$, alors il existe $X = (x_i)$ et $Y = (y_j) \in \{-1,1\}^n$ tels que

$$n^2 = X^\top A Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{i,j} y_j.$$

Or, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $x_i a_{i,j} y_j \in \{-1,1\}$. On en déduit que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, x_i a_{i,j} y_j = 1$$

(somme de n^2 termes, chaque terme valant au plus 1).

Par suite, comme $x_i, a_{i,j}, y_j \in \{-1,1\}$, on a, pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, $x_i y_j = a_{i,j}$.

On a donc, pour tout $j \in [[1,n]]$, $y_j \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$.

Par suite, toutes les colonnes de A sont multiples de $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, donc A est de rang inférieur ou égal à 1.

Comme de plus $A \neq 0$, $\operatorname{rang}(A) \geqslant 1$, et on a donc $\operatorname{rang}(A) = 1$.

Ainsi :

$$\boxed{(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c).}$$

Q6. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ vérifiant $n^2 \in S(A)$ est de rang 1, et s'obtient donc
- en choisissant les coefficients de la première colonne : 2^n choix
- en choisissant ensuite, pour les colonnes 2 à n, le coefficient (dans $\{-1,1\}$) multiplicateur permettant de passer de C_1 à C_i : 2 choix à chaque fois.

Cette construction permet d'obtenir une et une seule fois chaque matrice A de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ vérifiant $n^2 \in S(A)$.
On a donc par principe multiplicatif, 2^{2n-1} matrices dans ce cas et donc la proportion est :

$$\boxed{\frac{2^{2n-1}}{2^{n^2}} = \frac{1}{2^{n^2-2n+1}} = \frac{1}{2^{(n-1)^2}}.}$$

Partie II

Q7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$U_1(\Omega) = \{-1,1\}$ est un ensemble fini donc d'après le théorème de transfert, $e^{\lambda U_1}$ est d'espérance finie et on a :

$$E[e^{\lambda U_1}] = e^{-\lambda}P(U_1 = -1) + e^{\lambda}P(U_1 = 1) = \frac{1}{2}(e^{-\lambda} + e^{\lambda}) = \mathrm{ch}(\lambda).$$

En utilisant les développements en série entière des fonctions ch et exp, on obtient :

$$\mathrm{ch}(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}\lambda^{2n} \quad \text{et} \quad e^{\lambda^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!}\lambda^{2n}.$$

Or, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(2n)! = n!(n+1)\dots(2n) \geqslant n!2^n > 0$ (produit de n termes supérieurs à 2) donc comme $\lambda^{2n} \geqslant 0$, on a $\dfrac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \leqslant \dfrac{\lambda^{2n}}{2^n n!}$ et l'inégalité est vraie aussi en $n = 0$.
Par somme, on obtient $\mathrm{ch}(\lambda) \leqslant e^{\lambda^2/2}$.
D'où par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\varphi(\lambda) = \ln(E[e^{\lambda U_1}]) \leqslant \frac{\lambda^2}{2}.}$$

Q8. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $\lambda > 0$, on a $(S_k \geqslant t) = (e^{\lambda S_k} \geqslant e^{\lambda t})$ (car pour tout $\omega \in \Omega$, $S_k(\omega) \geqslant t$ si et seulement si $e^{\lambda S_k(\omega)} \geqslant e^{\lambda t}$ car la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$) donc :

$$P(S_k \geqslant t) = P(e^{\lambda S_k} \geqslant e^{\lambda t}).$$

Or, $e^{\lambda S_k} = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda U_i}$ est d'espérance finie comme produit de variables indépendantes d'espérances finies et

$$E[e^{\lambda S_k}] = \prod_{i=1}^{k} E[e^{\lambda U_i}] = \prod_{i=1}^{k} e^{\varphi(\lambda)} = e^{k\varphi(\lambda)}.$$

Donc, d'après l'inégalité de Markov appliqué à $e^{\lambda S_k}$ (variable à valeurs positives) et $e^{\lambda t} > 0$, on a :

$$P(e^{\lambda S_k} \geqslant e^{\lambda t}) \leqslant \frac{E[e^{\lambda S_k}]}{e^{\lambda t}}$$

d'où :

$$\boxed{P(S_k \geqslant t) \leqslant \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t).}$$

Q9. Pour tout $t > 0$, pour tout $\lambda > 0$,

$$P(S_k \geqslant t) \leqslant \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t) \leqslant \exp(k\frac{\lambda^2}{2} - \lambda t) \quad \text{(d'après } \mathbf{Q7} \text{ et par croissance de l'exponentielle)}$$

En prenant $\lambda = \dfrac{t}{k} > 0$, on obtient :

$$P(S_k \geqslant t) \leqslant \exp\left(k\frac{(t/k)^2}{2} - (t/k)t\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right).$$

$$\boxed{\text{Pour tout } t > 0,\ P(S_k \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right).}$$

Q10. Comme C suit une loi uniforme et $\operatorname{Card}(\mathcal{M}_n(\{-1,1\})) = 2^{n^2}$,

— pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $P(C = A) = \dfrac{1}{2^{n^2}}$,

— pour toute partie E de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $P(C \in E) = \dfrac{\operatorname{Card}(E)}{2^{n^2}}$.

• Il est clair que chacune des variables $x_i y_j C_{i,j}$ est à valeurs dans $\{-1,1\}$ car $\{-1,1\}$ est stable par produit, et que ces variables sont au nombre de n^2.

• Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a :

$$P(x_i y_j C_{i,j} = 1) = P(C_{i,j} = x_i y_j).$$

Or, $\{C \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\}), C_{i,j} = x_i y_j\}$ est de cardinal 2^{n^2-1} (car cela correspond au choix d'un (n^2-1)-uplet d'éléments de $\{-1,1\}$), donc :

$$P(x_i y_j C_{i,j} = 1) = \frac{2^{n^2-1}}{2^{n^2}} = 1/2 \quad \text{et} \quad P(x_i y_j C_{i,j} = -1) = 1 - P(x_i y_j C_{i,j} = 1) = 1/2.$$

Ces variables suivent donc bien une loi uniforme sur $\{-1,1\}$.

• Pour toute famille $(\alpha_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \{-1,1\}^{n^2}$,

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} P(x_i y_j C_{i,j} = \alpha_{i,j}) = \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1/2 = 1/2^{n^2}$$

et

$$P\left(\bigcap_{1\leqslant i,j\leqslant n} (x_i y_j C_{i,j} = \alpha_{i,j})\right) = P\left(\bigcap_{1\leqslant i,j\leqslant n} (C_{i,j} = \alpha_{i,j} x_i y_j)\right) = P(C = A) = 1/2^{n^2}$$

où $A = (\alpha_{i,j} x_i y_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

On a bien

$$P\left(\bigcap_{1\leqslant i,j\leqslant n} (x_i y_j C_{i,j} = \alpha_{i,j})\right) = \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} P(x_i y_j C_{i,j} = \alpha_{i,j})$$

d'où l'indépendance.

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}(x_i y_j C_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ est une famille de } n^2 \text{ variables aléatoires à valeurs dans } \{-1,1\},\\ \text{indépendantes et de loi uniforme.}\end{array}}$$

Q11. • Remarquons déjà que l'inégalité montrée en **Q9** est encore valable pour $t = 0$ car une probabilité est toujours inférieure ou égale à 1.

• Pour tout $t \geqslant 0$, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$M(C(\omega)) \geqslant tn^{3/2} \Leftrightarrow \exists (X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2, X^\top C(\omega) Y \geqslant tn^{3/2},$$

donc

$$(M(C) \geqslant tn^{3/2}) = \bigcup_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2} (X^\top CY \geqslant tn^{3/2}).$$

Par suite, par sous-additivité d'une probabilité,

$$P(M(C) \geqslant tn^{3/2}) = P\left(\bigcup_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2} (X^\top CY \geqslant tn^{3/2})\right) \leqslant \sum_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2} P(X^\top CY \geqslant tn^{3/2}).$$

• Or, pour tout $(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2$ fixé, $X^\top CY = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j C_{i,j}$, où les variables $(x_i y_j C_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont à valeurs dans $\{-1,1\}$, indépendantes et de loi uniforme.
D'où, d'après l'inégalité de Hoeffding,

$$P(X^\top CY \geqslant tn^{3/2}) = P\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j C_{i,j} \geqslant \underbrace{tn^{3/2}}_{\geqslant 0}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{(tn^{3/2})^2}{2n^2}\right) = \exp\left(-\frac{t^2 n}{2}\right).$$

• En réinjectant ce résultat dans l'inégalité obtenue au deuxième point, on obtient :

$$\begin{aligned} P(M(C) \geqslant tn^{3/2}) &\leqslant \sum_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2} P(X^\top CY \geqslant tn^{3/2}) \\ &\leqslant \sum_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2} \exp\left(-\frac{t^2 n}{2}\right) \\ &= 2^{2n} \exp\left(-\frac{t^2 n}{2}\right) \quad \text{(somme d'une constante, à } 2^{2n} \text{ termes)} \\ &= \exp\left(2n\ln(2) - \frac{t^2 n}{2}\right) = \exp\left(-\left(\frac{t^2}{2} - 2\ln 2\right)n\right). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } t \geqslant 0,\ P(M(C) \geqslant tn^{3/2}) \leqslant \exp\left(-\left(\frac{t^2}{2} - 2\ln 2\right)n\right).}$$

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} P\left(M(C) > (2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}\right) &\leqslant P\left(M(C) \geqslant (2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}\right) \\ &\leqslant \exp\left(-\left(\frac{(2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)^2}{2} - 2\ln 2\right)n\right) \\ &\qquad \text{(d'après } \mathbf{Q11} \text{ avec } t = 2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon \geqslant 0) \\ &= \exp\left(-\left(2\varepsilon\sqrt{\ln 2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)n\right) < 1 \quad \left(\text{car } -\left(2\varepsilon\sqrt{\ln 2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)n < 0\right) \end{aligned}$$

donc $\quad P(M(C) \leqslant (2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}) > 0.$

Il existe donc $\omega \in \Omega$ tel que $M(C(\omega)) \leqslant (2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}$.
Par définition de $\underline{M}(n)$ et comme $M(C(\omega)) \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, on en déduit que :

$$\underline{M}(n) \leqslant M(C(\omega)) \leqslant (2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, en faisant tendre ε vers 0, on obtient donc bien :

$$\boxed{\underline{M}(n) \leqslant 2\sqrt{\ln 2}\, n^{3/2}.}$$