RAPPELS SUR LES FONCTIONS RÉLLES DE LA VARIABLE RÉELLE

Dans toute la suite, f désigne une fonction réelle de la variable réelle.

I. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1 (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

On suppose que f est continue sur l'intervalle I. Soit $(a,b) \in I^2$.
Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c entre a et b tel que $f(c) = k$.

II. Théorème de la bijection et fonction réciproque

Proposition 2

- Si f est continue sur l'intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle.
- Si f est continue sur le segment I alors $f(I)$ est un segment.

Théorème 3 (*Théorème de la bijection*)

Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
De plus, f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, avec le même sens de variation que f.

Proposition 4 (*Dérivée de la fonction réciproque*)

On suppose que f réalise une bijection de l'intervalle I sur $f(I)$.
Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a :

$$\forall y \in f(I),\ \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

III. Théorème de Rolle et accroissements finis

a et b désignent ici deux réels avec $a < b$.

Théorème 5 (*Théorème de Rolle*)

On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 6 (*Égalité des accroissements finis*)

On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Théorème 7 (*Inégalité des accroissements finis*)

On suppose que f est dérivable sur l'intervalle I et il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant M$.
Alors f est M-lipschitzienne c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|.$$

Cas particulier important : Si $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ alors f est dérivable sur $[a,b]$ à dérivée bornée (puisque f' est une fonction continue sur le segment $[a,b]$) donc l'inégalité des accroissements finis s'applique.

IV. Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 8 (*Théorème de la limite de la dérivée*)

Soit I un intervalle et $a \in I$.
On suppose que f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.

Conséquences importantes :

- Si $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R}) \cap \mathscr{D}(I \setminus \{a\},\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
  La fonction f' est de plus continue en a.
- Si $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^1(I \setminus \{a\},\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $f'(a) = \ell$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. On pourra montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x}$.

V. Variations

Théorème 9

On suppose que f est dérivable sur l'intervalle I.

- La fonction f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
- La fonction f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
- La fonction f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I et f' n'est identiquement nulle sur aucun sous-intervalle ouvert $]a,b[$ de I.

En particulier, si f' est positive sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante sur I.

VI. Formules de Taylor

Théorème 10 (*Formule de Taylor-Young*)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur l'intervalle I.
Soit $a \in I$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a de la forme :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right).$$

Théorème 11 (*Formule de Taylor avec reste intégral*)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I.
Pour tout $(a,b) \in I^2$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Théorème 12 (*Inégalité de Taylor-Lagrange*)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I.
On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in I$, $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$.
Pour tout $(a,b) \in I^2$, on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- Pour $n = 0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis.
- Les formules de Taylor sont encore valables pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.