
ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Cours (Deuxième partie)

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés.

On s'intéresse dans ce chapitre aux applications définies sur une partie A de E (non vide) à valeurs dans F .

I. CONTINUITÉ D'UNE APPLICATION ENTRE ESPACES VECTORIELS NORMÉS

A. DÉFINITIONS

Définition 1

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$.

- ▶ Soit $a \in A$. On dit que f est *continue au point* a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in A \text{ vérifiant } \|x - a\|_E \leq \eta, \text{ on a } \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon.$$

- ▶ On dit que f est *continue sur* A lorsque f est continue en tout point de A .

Si les espaces vectoriels E et F sont de dimension finie alors la notion de continuité ne dépend pas des normes choisies en raison de l'équivalence des normes.

B. PROPRIÉTÉS

Proposition 2 (Caractérisation séquentielle)

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$. Soit $a \in A$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue au point a
- (ii) pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$

Proposition 3 (Opérations)

- ▶ Soit $f : A \rightarrow F$ et $g : A \rightarrow F$. Soit $a \in A$.
Si f et g sont continues en a alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f + g$ est continue en a .
- ▶ Soit $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ et $g : A \rightarrow F$. Soit $a \in A$.
Si f et g sont continues en a alors fg est continue en a .
- ▶ Soit $f : A \subset E \rightarrow F$ et $g : f(A) \rightarrow G$. Soit $a \in A$.
Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a .

- ▶ On peut remplacer « en a » par « sur A ».
Composition : si f est continue sur A et g est continue sur $f(A)$ alors $g \circ f$ est continue sur A .
- ▶ L'ensemble des fonctions continues de A dans F , noté $\mathcal{C}(A, F)$, est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Proposition 4 (*Fonctions coordonnées*)

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$. Soit $a \in A$.

On suppose que F est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Soit \mathcal{B} une base de F .

Pour tout $x \in A$, on note $\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix}$ le vecteur-colonne des coordonnées de $f(x)$ dans \mathcal{B} .

La fonction f est continue en a (resp. sur A) si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées f_1, \dots, f_p sont continues en a (resp. sur A).

C. EXEMPLES FONDAMENTAUX

1. FONCTIONS POLYNÔMIALES

Définition 5

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Soit \mathcal{B} une base de E .

Pour tout $x \in E$, on note $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ le vecteur-colonne de ses coordonnées dans la base \mathcal{B} .

- ▶ On appelle *fonction monôme* sur E toute application du type
$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_p^{\alpha_p} \end{array}$$
 où $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$.
- ▶ On appelle *fonction polynômiale* sur E toute combinaison linéaire de fonctions monômes.

Proposition 6

Toute fonction polynômiale sur E est continue sur E .

Exemple 1 : Montrer que les fonctions suivantes sont continues.

1. $N : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 \end{cases}$
2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & \left(x^2 - y^2 - 2xy, \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}, x \right) \end{cases}$
3. $\text{tr} : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ M & \longmapsto & \text{tr}(M) \end{cases}$

2. APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES

Définition 7

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$. Soit $k \in \mathbb{R}_+$.

On dit que f est *k-lipschitzienne* sur A lorsque pour tout $(x, y) \in A^2$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

Cas particulier important : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} , dont la dérivée est bornée sur I , alors f est lipschitzienne sur I .

En effet, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$ et donc par l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

Proposition 8

Toute fonction lipschitzienne sur A est continue sur A .

Exemple 2 : Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\|_E \end{array}$$
 est continue sur E .

3. APPLICATIONS LINÉAIRES ET MULTILINÉAIRES

Théorème 9

Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire avec E de dimension finie alors f est continue sur E .

Définition 10

L'application $f : \prod_{j=1}^p E_j \rightarrow F$ est dite *multilinéaire* ou *p-linéaire* lorsque f est linéaire par rapport à chacune de ses variables c'est-à-dire :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p) \in \prod_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} E_j, \begin{array}{ccc} E_i & \rightarrow & F \\ x_i & \mapsto & f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_p) \end{array} \text{ est linéaire.}$$

Théorème 11

Si $f : \prod_{j=1}^p E_j \rightarrow F$ est une application multilinéaire avec E_1, \dots, E_p de dimension finie alors

f est continue sur $\prod_{j=1}^p E_j$.

Exemples importants :

- ▶ *Déterminant* : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension p et \mathcal{B} une base de E .
L'application
$$\begin{array}{ccc} E^p & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (u_1, \dots, u_p) & \mapsto & \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p) \end{array}$$
 est continue sur E^p (car multilinéaire).
- ▶ *Produit matriciel* :
L'application
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K}) \\ (M, N) & \mapsto & MN \end{array}$$
 est continue sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ (car bilinéaire).

Exemple 3 :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les applications suivantes sont continues.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (X, Y) & \mapsto & X^T AY \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ X & \mapsto & X^T AX \end{array} \right\}$$

sont continues.

2. Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ qui converge vers M et $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ qui converge vers N .

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n N_n = MN$.

Soit $P \in GL_p(\mathbb{K})$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P M_n P^{-1} = P M P^{-1}$.

II. TOPOLOGIE D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

Dans ce paragraphe, $(E, \|\cdot\|)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel normé.

A. SOUS-ENSEMBLES REMARQUABLES D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

1. BOULES ET SPHÈRES

Définition 12

Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- ▶ On appelle *boule ouverte de centre a et de rayon r* et on note $B_o(a, r)$ l'ensemble :

$$B_o(a, r) = \{u \in E \text{ tel que } \|u - a\| < r\}.$$

- ▶ On appelle *boule fermée de centre a et de rayon r* et on note $B_f(a, r)$ l'ensemble :

$$B_f(a, r) = \{u \in E \text{ tel que } \|u - a\| \leq r\}.$$

- ▶ On appelle *sphère de centre a et de rayon r* et on note $S(a, r)$ l'ensemble :

$$S(a, r) = \{u \in E \text{ tel que } \|u - a\| = r\}.$$

$B_o(0_E, 1)$ est la *boule unité ouverte*, $B_f(0_E, 1)$ la *boule unité fermée* et $S(0_E, 1)$ la *sphère unité*.

Exemple 4 :

1. Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, déterminer $B_o(a, r)$, $B_f(a, r)$ et $S(a, r)$.

2. Représenter graphiquement la boule unité ouverte, la boule unité fermé et la sphère unité de \mathbb{R}^2 pour les normes $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$.

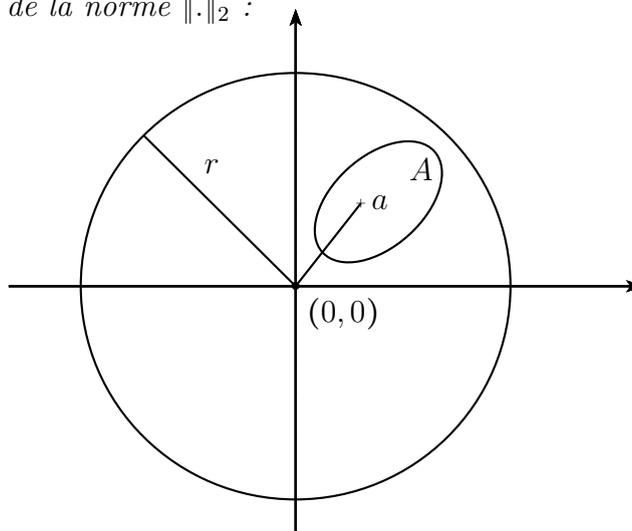
2. PARTIES BORNÉES ET FONCTIONS BORNÉES

Définition 13

Soit A une partie de E .

On dit que A est *bornée* pour la norme $\|\cdot\|$ lorsque A est incluse dans une boule fermée de centre 0_E , c'est-à-dire lorsqu'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $a \in A$, on a $\|a\| \leq r$.

Illustration dans \mathbb{R}^2 muni de la norme $\|\cdot\|_2$:



- ▶ Attention à l'ordre des quantificateurs. Le réel r doit être le même pour tous les vecteurs de A .
- ▶ Une partie A n'est pas bornée si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|a_n\| = +\infty$.
- ▶ En dimension finie, la notion de partie bornée ne dépend pas de la norme utilisée en raison de l'équivalence des normes.

Exemple 5 :

1. Montrer que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 + xy \leq 1\}$ est une partie bornée de \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 = 1\}$ n'est pas une partie bornée de \mathbb{R}^2 .

Proposition 14

Les boules et les sphères sont des parties bornées.

Définition 15

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$.

On dit que f est *bornée sur* A lorsqu'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in A$, $\|f(x)\|_F \leq r$.

- ▶ La fonction f est bornée si et seulement si $f(A) = \{f(x), x \in A\}$ est une partie bornée de F .
- ▶ Si F est de dimension finie, cette notion ne dépend pas de la norme utilisée sur F .

3. PARTIES CONVEXES

Définition 16

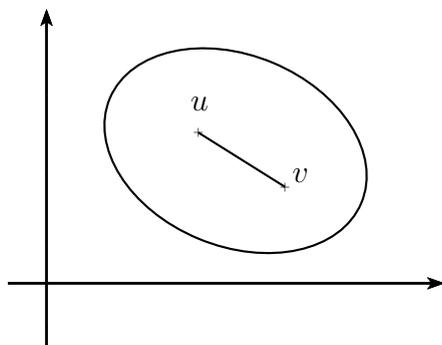
Soit A une partie de E .

On dit que A est *convexe* lorsque pour tout $(u, v) \in A^2$, pour tout $t \in [0, 1]$, $tu + (1-t)v \in A$.

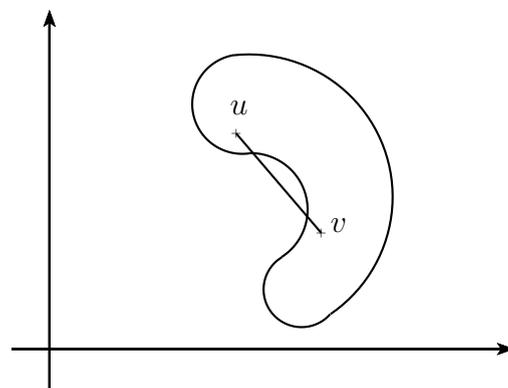
Cela signifie que pour tout couple (u, v) de vecteurs de A , le segment $[u, v]$ est inclus dans A .

Illustration dans \mathbb{R}^2 :

Partie convexe



Partie non convexe



Exemple : Les intervalles sont les parties convexes de \mathbb{R} .

Exemple 6 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Montrer que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq f(x)\}$ est une partie convexe.

Proposition 17

Les boules sont des parties convexes.

B. TOPOLOGIE

Les notions présentées dans ce paragraphe sont invariantes par passage à une norme équivalente. Par conséquent, si E est un espace vectoriel normé de **dimension finie** alors ces notions ne dépendent pas de la norme utilisée sur E puisque toutes les normes sur E sont équivalentes.

1. POINT INTÉRIEUR, OUVERT, FERMÉ

Définition 18

Soit A une partie de E .

- Soit $a \in E$. On dit que a est un *point intérieur* à A lorsque :

$$\exists r > 0 \text{ tel que } B_o(a, r) \subset A.$$

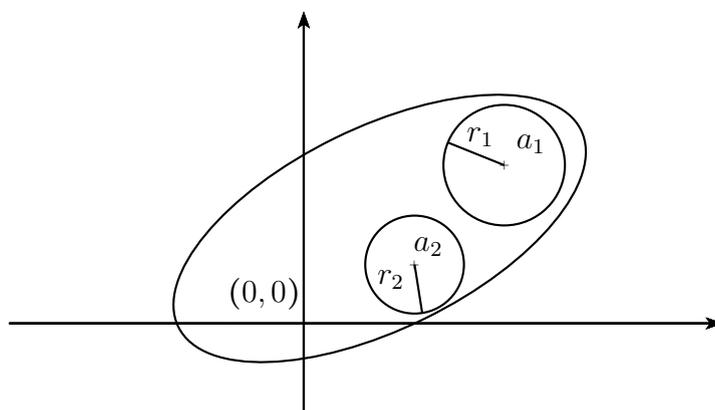
- On dit que A est une *partie ouverte* de E ou un *ouvert* de E lorsque tout point de A est un point intérieur à A c'est-à-dire :

$$\forall a \in A, \exists r > 0 \text{ tel que } B_o(a, r) \subset A.$$

- On dit que A est une *partie fermée* de E ou un *fermé* de E lorsque $E \setminus A$ est un ouvert de E .

Bien noter l'ordre des quantificateurs dans la définition d'un ouvert. Le réel r dépend de a .

Illustration dans \mathbb{R}^2 muni de la norme $\|\cdot\|_2$:



La partie représentée ci-dessus est ouverte si et seulement si elle ne contient pas son bord.

La partie représentée ci-dessus est fermée si et seulement si elle contient son bord.

Exemples : Les intervalles ouverts de \mathbb{R} sont ceux du type $]a, b[$ avec a et b tels que $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ et les intervalles fermés de \mathbb{R} sont ceux du type $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $] -\infty, b]$, $] -\infty, +\infty[$ et \emptyset avec a et b réels tels que $a \leq b$.

Soit A une partie de E . On a les équivalences :

$$[A \text{ est un fermé} \Leftrightarrow E \setminus A \text{ est un ouvert}] \quad , \quad [A \text{ est un ouvert} \Leftrightarrow E \setminus A \text{ est un fermé}]$$

Mais attention, « fermé » n'est pas le contraire de « ouvert ».

Les ensembles E et \emptyset sont à la fois ouverts et fermés. L'ensemble $[0, 1[$ n'est ni ouvert, ni fermé.

Proposition 19

- Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.
- Une réunion finie de fermés est un fermé.
Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

2. POINT ADHÉRENT, ADHÉRENCE, PARTIE DENSE

Définition 20

Soit A une partie de E .

- ▶ Soit $x \in E$. On dit que x est un *point adhérent* à A lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tel que } \|x - a\| < \varepsilon.$$

- ▶ On appelle *adhérence de A* et on note \overline{A} l'ensemble des points adhérents à A .
- ▶ La partie A est dite *dense dans E* lorsque $\overline{A} = E$.

- ▶ Le point x est adhérent à A si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $B_o(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
- ▶ On a toujours $A \subset \overline{A} \subset E$.

Proposition 21

Soit A une partie de E .

A est un fermé de E si et seulement si $\overline{A} = A$.

Proposition 22 (Caractérisations séquentielles)

Soit A une partie de E .

- ▶ Soit $x \in E$.
 x est un point adhérent à A si et seulement s'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x .
- ▶ A est un fermé de E si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers $\ell \in E$ alors $\ell \in A$.
- ▶ A est dense dans E si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x .

Exemple 7 :

1. Déterminer l'adhérence de $[0, 1[$.
2. Prouver que $[-3, +\infty[$ est un fermé de \mathbb{R} .
3. Prouver que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -2x + e^y > 0\}$ un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Proposition 23

- ▶ Les boules ouvertes sont des ouverts.
- ▶ Les boules fermées et les sphères sont des fermés.

En particulier, les singletons $\{a\} = B_f(a, 0)$ pour $a \in E$, sont des fermés.

Exemple 8 : Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (sous-ensemble des matrices symétriques) et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (sous-ensemble des matrices antisymétriques) sont des fermés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si la suite $(A^p)_{p \geq 0}$ converge alors sa limite est 0_n (on pourra considérer les suites extraites $(A^{2p})_{p \geq 0}$ et $(A^{2p+1})_{p \geq 0}$).

Théorème 24

Soit $f : E \rightarrow F$. On suppose que f est continue sur E .

- ▶ Si A est un ouvert de F alors $f^{-1}(A) = \{x \in E, f(x) \in A\}$ est un ouvert de E .
- ▶ Si A est un fermé de F alors $f^{-1}(A) = \{x \in E, f(x) \in A\}$ est un fermé de E .

En particulier, si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur E alors :

- ▶ l'ensemble $\{x \in E, f(x) > 0\}$ est un ouvert,
- ▶ les ensembles $\{x \in E, f(x) = 0\}$ et $\{x \in E, f(x) \geq 0\}$ sont des fermés.

Exemple 10 :

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.
Montrer que $]a, +\infty[$ et $]a, b[$ sont des ouverts de \mathbb{R} .
Montrer que $] - \infty, b]$ et $[a, b]$ sont des fermés de \mathbb{R} .
2. Montrer que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xe^y \leq x + 3yx^5 \leq 2y\}$ est un fermé de \mathbb{R}^2 .
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dit positif lorsque toutes ses composantes x_i sont positives ou nulles. On note alors $X \geq 0$.
Montrer que $E = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid X \geq 0\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3. THÉORÈME DES BORNES ATTEINTES

Théorème 25

Soit $f : A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f est une fonction continue sur A et si A est une partie non vide, fermée et bornée de E avec E de dimension finie alors f est bornée et atteint ses bornes c'est-à-dire :

$$\exists(a, b) \in A^2, \forall x \in A, f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

C'est une généralisation du théorème connu pour les fonctions continues sur un segment (*théorème des bornes* ou *théorème de Weierstrass*).

Notons que l'on a dans ce cas $f(a) = \min\{f(x), x \in A\}$ et $f(b) = \max\{f(x), x \in A\}$. On pensera notamment à utiliser ce résultat lorsqu'il faut justifier l'existence d'un minimum ou d'un maximum (ou même d'une borne inférieure ou d'une borne supérieure).

Exemple 11 : Norme subordonnée

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés avec E de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On pose $\|f\| = \text{Sup}\{\|f(x)\|_F, x \in E \text{ tel que } \|x\|_E = 1\}$.

Montrer que $\|f\|$ est bien définie et qu'il existe $x_0 \in E$ unitaire tel que $\|f\| = \|f(x_0)\|_F$.

On peut montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.

III. LIMITE EN UN POINT D'UNE APPLICATION ENTRE ESPACES VECTORIELS NORMÉS

A. DÉFINITION

Définition 26

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$. Soit a un point adhérent à A . Soit $\ell \in F$.

On dit que f admet pour limite ℓ au point a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in A \text{ vérifiant } \|x - a\|_E \leq \eta, \text{ on a } \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

- ▶ Si les espaces vectoriels E et F sont de dimension finie alors l'existence et la valeur de la limite ne dépendent pas des normes choisies.
- ▶ *Cas particulier* $a \in A$: Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ alors nécessairement, $\ell = f(a)$.
Cela correspond à la notion de continuité de f en a (étudiée dans le paragraphe I.)
- ▶ Noter l'équivalence : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - \ell\|_F = 0$.
- ▶ Pour tout $a \in E$, on a $\lim_{x \rightarrow a} \|x - a\|_E = 0$.

B. PROPRIÉTÉS

Proposition 27 (Théorème d'encadrement)

Soit A une partie de E et a un point adhérent à A . Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit f, g et h trois applications de A dans \mathbb{R} .

On suppose que pour tout $x \in A$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et f et h ont pour limite ℓ au point a .

Alors g a pour limite ℓ au point a .

Exemple 12 : On se place sur \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique.

Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow v} \langle u, x \rangle = \langle u, v \rangle$.

Théorème 28 (Caractérisation séquentielle)

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$. Soit a un point adhérent à A .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

(ii) pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$

- ▶ Si l'on trouve une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ mais $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ alors f n'a pas pour limite ℓ au point a .
- ▶ Si l'on trouve deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$ mais $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers deux limites différentes alors f n'a pas de limite au point a .

Application à l'étude de limites / de la continuité des fonctions de plusieurs variables :

Exemple 13 : Soit f et g les fonctions définies sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{et } g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Étudier la continuité des fonctions f et g .

Exemple 14 : Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on pose $\varphi(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ et $\psi(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

Étudier la limite de φ et ψ au point $(0, 0)$.

Proposition 29 (Opérations algébriques sur les limites)

Soit A une partie de E et a un point adhérent à A .

- ▶ Soit $f : A \rightarrow F$ et $g : A \rightarrow F$.
Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell_2$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \ell_1 + \ell_2$.
- ▶ Soit $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ et $g : A \rightarrow F$.
Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lambda$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lambda \ell$.

Proposition 30 (Composition)

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$ et $g : f(A) \rightarrow G$.

Soit a un point adhérent à A .

- ▶ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ alors b est un point adhérent à $f(A)$.
- ▶ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

C. CAS OÙ F EST DE DIMENSION FINIE

Proposition 31 (Fonctions coordonnées)

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$ et a un point adhérent à A .

On suppose que F est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F .

Pour tout $x \in A$, on note $\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix}$ le vecteur-colonne des coordonnées de $f(x)$ dans \mathcal{B} .

La fonction f admet une limite en a si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées f_1, \dots, f_p ont une limite en a .

Dans ce cas, on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sum_{k=1}^p \left(\lim_{x \rightarrow a} f_k(x) \right) e_k$.

Exemple 15 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}, \frac{1 - \cos x}{x^2} \right)$.

Étudier la limite de f en 0.

Définition 32

- Soit $f : A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$. Soit a un point adhérent à A .
On dit que f admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) au point a lorsque :

$$\forall M > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in A \text{ vérifiant } \|x - a\|_E \leq \eta, \text{ on a } f(x) \geq M$$

(resp. $\forall M < 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in A$ vérifiant $\|x - a\|_E \leq \eta$, on a $f(x) \leq M$)

On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$).

- Soit $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ avec A non majorée (respectivement non minorée). Soit $\ell \in F$.
On dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \in A \text{ vérifiant } x \geq M, \text{ on a } \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon$$

(resp. $\forall \varepsilon > 0, \exists M < 0$ tel que $\forall x \in A$ vérifiant $x \leq M$, on a $\|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon$)

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$).

Les opérations sur les limites, la caractérisation séquentielle et le cas où F est de dimension finie s'adaptent naturellement à ces situations.

Noter la différence entre $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \ell$ (limite de suite) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (limite de fonction).

Si on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ alors on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \ell$ (caractérisation séquentielle, sens composition) mais la réciproque n'est pas vraie en général.

Par contre, si l'on sait que f admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ (par exemple parce que c'est une fonction monotone au voisinage de $+\infty$) et qu'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \ell$ alors on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.