Analyse : Chapitre 9

Dérivation

I Propriétés avancées de la dérivation

1) Rappels et compléments :

a) Définitions, propriétés immédiates

Définition :

Soit $I \subset \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **dérivable en un point** $a \in I$ si et seulement si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe et est finie.}$$

On note alors cette limite $f'(a)$ on encore $\dfrac{df}{dx}(a)$.

Remarques :

- En faisant le changement de variable $x = x_0 + h$ on obtient une définition équivalente :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- On dit qu'une fonction est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point $a \in I$. On note alors f' la fonction dérivée de f.

Proposition 1 : Développement limité d'ordre 1

Soit f définie sur un intervalle I et $a \in I$. f est dérivable en a si et seulement si il existe une fonction ε définie au voisinage de 0 telle que

$$\forall h \in \mathbb{R} \text{ tel que } a + h \in I, f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h)$$

où ε est une fonction telle que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
On a alors $\ell = f'(a)$ et l'écriture

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$$

est appelée **développement limité d'ordre** 1 de f en a.

▷ *Preuve* :

◁

Remarques :

- Si f est dérivable, on a donc

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$$

Le terme $h\varepsilon(h)$ est souvent abrégé en $o(h)$ (lire "petit o"). On dit alors que c'est une **fonction négligeable** devant h, et on a ainsi :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$$

- On peut aussi écrire $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a)$, ou encore

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

Ainsi $f(x)$ est "presque égale" à l'expression de la dérivée de f en a : c'est ce qui se voit graphiquement avec la tangente qui "colle" au graphe de f...

b) Opération sur les dérivées :

Proposition 2 : combinaison linéaire de fonctions dérivables

Soient f et g deux fonctions dérivables en a. Alors $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable a et on a :

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$$

On dit que l'opération de dérivation est une application linéaire sur l'espace des fonctions dérivables...

▷ *Preuve :* Cela provient de la même propriété connues sur les limites : $\lim\limits_a(\lambda f + \mu g) = \lambda \lim\limits_a f + \mu \lim\limits_a g$, mais on peut aussi faire une jolie preuve avec les développements limités d'ordre 1 :

◁

Exemple : dérivée des polynômes

Proposition 3 : Produit de fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions dérivables en x_0, alors $u \times v$ est dérivable en x_0 avec

$$(u \times v)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$$

En abrégé avec u et v dérivables sur un intervalle I :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

▷ *Preuve* : Avec le taux d'accroissement :

◁

Proposition 4 : Composition de fonctions dérivables

Soit $u : E \to F$ et $v : F \to G$ telles que u est dérivable en $x_0 \in E$ et v dérivable en $u(x_0)$. Alors $v \circ u$ est dérivable en x_0 et on a

$$(v \circ u)'(x_0) = v'(u(x_0))u'(x_0)$$

En abrégé :

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$$

Proposition 5 : quotient de fonction dérivables

Soient u et v deux fonctions dérivables en x_0 avec $v(x_0) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable en x_0 et on a

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}$$

En abrégé :

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

▷ *Preuve* : Il suffit de voir le quotient comme un produit, et $\frac{1}{v}$ comme une composition. ◁

c) Dérivation de la réciproque

Proposition 6 :

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I sur un intervalle J, et soit $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque.
Si f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y_0)}$$

En abrégé :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

▷ *Preuve* : On admet. ◁

2) Dérivées à droite ou à gauche

a) Définition :

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f admet une **dérivée à droite** en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et est finie}$$

On note alors la dérivée à droite : $f'_d(x_0)$.

De même, on parle de **dérivée à gauche** en x_0, que l'on note $f'_g(x_0)$ si et seulement si

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et est finie}$$

Interprétation graphique : demi tangente
Pour la même raison que pour la dérivation, on va obtenir un vecteur tangent au graphe de f, mais qui ne fonctionne que d'un côté. On parle alors de "demi tangente" à droite et à gauche.
Exemple :
considérons f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - 1|$ et faisons son étude en 1 :

b) Lien entre dérivée à droite, à gauche et dérivée "tout court"

C'est (presque) le même théorème que pour les limites à droite et à gauche en un point :

Proposition 7 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. Alors
f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 avec $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.
On a alors $f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0)$.

▷ *Preuve* : cf le théorème (presque) identique chez les limites... ◁

Exemples :

1. $x \to |x|$ n'est pas dérivable en 0 puisque les dérivées à droite et à gauche sont différentes.
2. Soit f définie par $f(x) = x\sin(x)$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$. Montrez que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

3) Continuité et dérivation

a) Dérivabilité ⇒ continuité

Proposition 8 :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

▷ *Preuve* :

◁

Remarques :

- La réciproque est fausse : ce n'est pas parce que f est continue qu'elle est dérivable. Par exemple $x \to |x|$ est continue, mais pas dérivable en 0.
  Il existe même des fonctions continues mais dérivables nulle part ! (cf "courbe de Bolzano", mouvement Brownien, etc.)
- On peut montrer de la même façon que si f est dérivable à droite en a, elle est continue à droite en a, de même pour la dérivabilité à gauche.

b) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$:

Définition :

- Une fonction f est dite **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I si et seulement si f est dérivable et sa dérivée est continue sur I.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I ssi f est dérivable n fois sur I et que sa dérivée n ième $f^{(n)}$ est continue sur I.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exemples :
Les fonctions sin, cos, exp, sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Propriété 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Les combinaisons linéaires de fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un ensemble sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur cet ensemble.
2. Le produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ et de classe $\mathcal{C}^n$.
3. Si f et g sont $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, alors $\dfrac{f}{g}$ est $\mathcal{C}^n$ en tout point de I où g ne s'annule pas.
4. Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $g \in \mathcal{C}^n(J)$ avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

▷ *Preuve* : Tout se montre à l'aide des formules de dérivations, qui permettent d'exprimer les dérivées successives et de montrer le tout avec ou sans récurrence.
Par exemple pour le produit :
on a montré la formule de Leibniz qui donne la dérivée n-ième du produit

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Comme f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$, toutes leurs dérivées successives sont continues. Par produit et somme de fonctions continues, on en déduit que $(fg)^{(n)}$ est continue donc fg est de classe $\mathcal{C}^n$.
◁

Proposition 9 :

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I dans un intervalle J, et soit $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque.
Soit $k \geq 1$, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ en $y_0 = f(x_0)$.

Autrement dit, si f' ne s'annule pas, alors f et f^{-1} sont de même régularité...
et ce qui est surprenant, c'est qu'il n'est *pas nécessaire* de regarder les autres dérivées !

▷ *Preuve* :

◁

Exemples :
La fonction tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, et sa dérivée ne s'annule jamais.
Ainsi, sa réciproque, la fonction arctan, est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

II Théorème des accroissements finis et applications

1) Théorème des accroissements finis

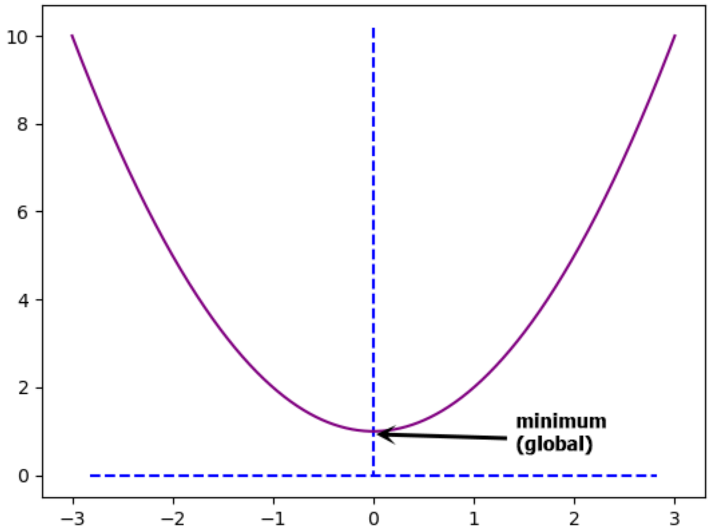
a) Extrema de fonctions et dérivée

Définition :

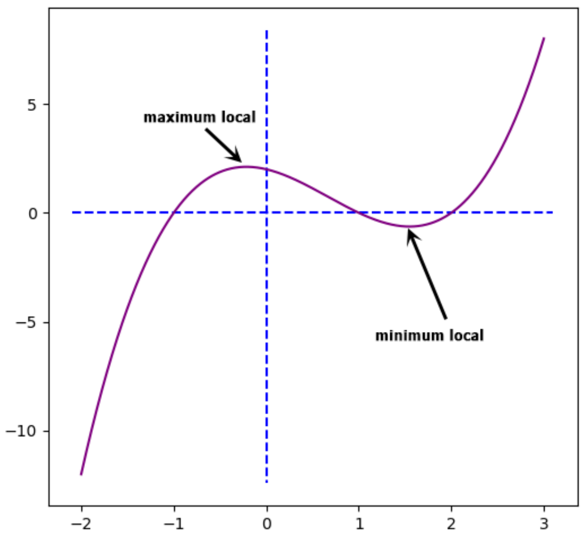
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $c \in I$.
On dit que f admet un **minimum** (resp un **maximum**) au point c si et seulement si $\forall x \in I,\ f(x) \geq f(c)$ (resp. $f(x) \leq f(c)$.
On parle de **minimum local** (resp **maximum local**) au point c si au voisinage de c, $f(c)$ est un minimum (resp maximum).

Exemples :

- $f(x) = x^2 + 1$, minimum (global) en $x = 0$.



- $f(x) = (x-2)(x-1)(x+1)$: un minimum local et un maximum local



Remarques :

- Un minimum "tout court" est également un minimum local...
- Le terme "extremum" regroupe "minimum" et "maximum".

Proposition 10 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $]a, b[$ telle que en un point $c \in]a, b[$, f admet un extremum (éventuellement local), alors $f'(c) = 0$

▷ *Preuve* :

◁

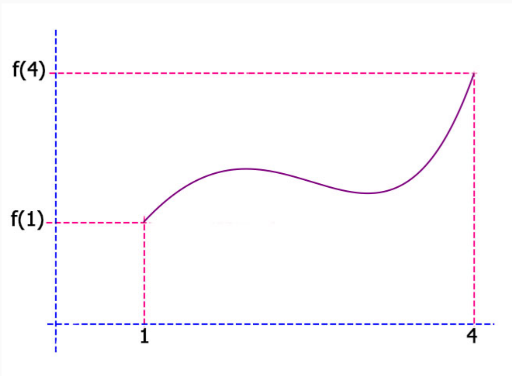
Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On dit que c est un **point critique** de f si $f'(c) = 0$.

Danger ! **PIÈGES :**

Repérer les points critiques permet de repérer les extremums éventuels quand on est à l'intérieur d'un intervalle mais il y a deux pièges :

1. Ce n'est pas parce que $f'(c) = 0$ que c est un extremum (pensez à $x \mapsto x^3$ dont la dérivée s'annule en 0)
2. Cela ne donne pas d'info sur les bords des intervalles d'études. Considérons la fonction dont le graph est représenté ci dessous, étudiée uniquement sur $[1, 4]$.



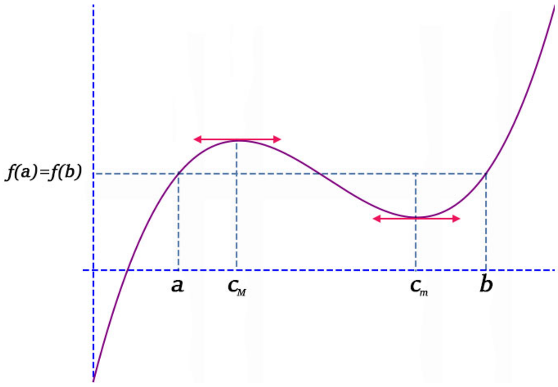
Elle admet sur $[1, 4]$ un minimum en 1, mais la dérivée en 1 n'est clairement pas 0 (on a une pente non nulle). Il y a également un maximum en 4, avec à nouveau clairement une dérivée non nulle.

A retenir : quand on cherche des extremums sur des intervalles fermés, il convient d'étudier séparément les bords, qui peuvent aussi être des extremums...

b) Théorème de Rolle

Theorème 1 :

Soient a et b réels avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ telque $f'(c) = 0$.



▷ *Preuve* :

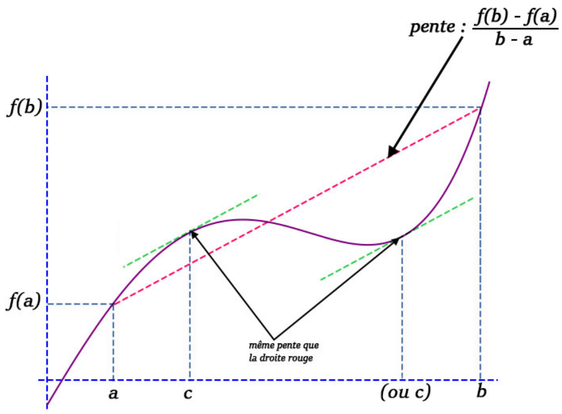
◁

c) Théorème des accroissements finis

Theorème 2 :

Soif f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.
(ou encore : il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.)

Le théorème des accroissements finis est en fait le théorème de Rolle "penché" :



Au lieu de chercher des points où la pente est nulle, on cherche des points où la pente est la même qu'entre a et b.
▷ *Preuve* : Il s'agit de "redresser" f pour pouvoir appliquer le théorème de Rolle. :

◁

2) Application du T.A.F. :

a) Signe de la dérivée et monotonie

Theorème 3 :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors
1. f est croissante sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \geq 0$.
2. f est décroissante sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \leq 0$.
3. f est constante sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) = 0$.

▷ *Preuve* :

◁

Remarques :
1. Il est important dans ce théorème de voir que f n'a pas besoin d'être dérivable aux bornes de l'intervalle considéré. C'est important pour dire par exemple que la fonction $\sqrt{\ }$ est croissante à partir de l'étude de sa dérivée : elle n'est pas dérivable en 0, mais ce n'est pas grave : $\sqrt{\ }$ est bien croissante sur $[0, +\infty[$ car sa dérivée est ≥ 0 sur $]0, +\infty[$.
2. Ce théorème est valable également pour f continue sur $]a, b[$ seulement. La preuve est la même (on a bien $[x_1, x_1] \subset]a, b[$) et on obtient alors une fonction monotone sur $]a, b[$ (ouvert ! si on n'a pas la continuité en a ou en b, on n'a pas forcément la monotonie sur $[a, b]$)

b) Stricte monotonie

Theorème 4 :
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable en sur $]a, b[$ avec $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.

▷ *Preuve* :
Reprendre la preuve précédente en choisissant $x_1 < x_2$. On applique le TAF et on a alors $f(x_1) < f(x_2)$. ◁

Remarque : il suffit donc que la dérivée soit strictement positive à l'intérieur, peu importe les bords...

Corolaire 1 :
Soit f dérivable sur un intervalle I. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.

▷ *Preuve* : Il suffit d'appliquer le théorème précédent sur des petits morceaux. On admet. ◁

Exemple :
La fonction $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet, $f'(x) = 3x^2 > 0$ sauf pour $x = 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (de bijection réciproque $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.)

c) Limite de la dérivée

Theorème 5 : théorème de la limite de la dérivée
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

1. Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$ et f de classe $\mathscr{C}^1$ en a.
2. si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = +\infty$ ou $-\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ ou $-\infty$. Ainsi, f n'est pas dérivable mais il y a une tangente verticale au graph de f en a.

▷ *Preuve* :

◁

Exemples :

- On reprend l'exemple de f définie par $f(x) = x\sin(x)$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$.

- Soit $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

d) Inégalité des accroissements finis

Theorème 6 : Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f'(x)| \leq K$$

Alors pour tous réels x et y dans I, on a

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|$$

▷ *Preuve* :

◁

Définition :

Soit $K \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f est K-lipschitzienne si et seulement si

$$\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leq K|y - x|$$

Ainsi, l'inégalité des accroissement finis garantit que si f' est bornée, alors f est lipschitzienne.

Exemple d'applications aux suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

cf TD !

III Convexité

1) Définition

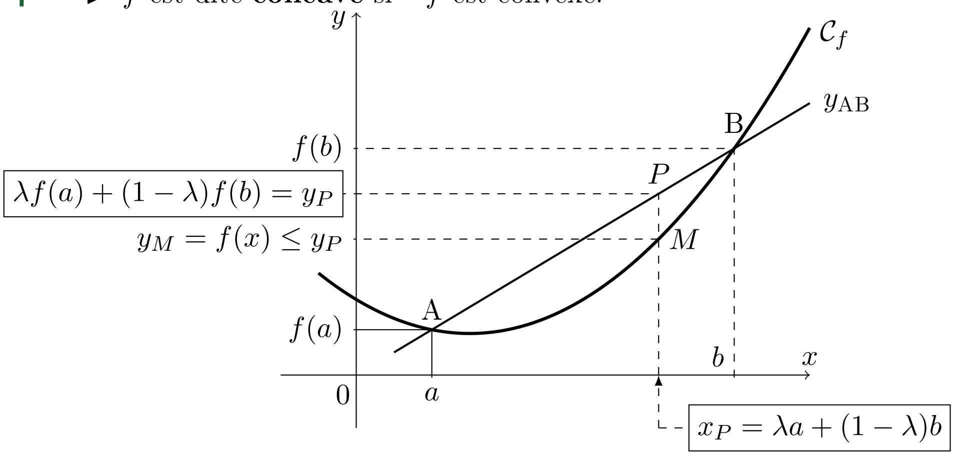
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f est dite **convexe** si et seulement si

$$\forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0,1], f\left((1-\lambda)a + \lambda b\right) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

- f est dite **concave** si $-f$ est convexe.



Autrement dit :

Propriété 2 : Interprétation graphique

Soit $a < b$ et $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ deux points de $\mathcal{C}_f$.
Si f est convexe alors, entre a et b, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de (AB).

On dit également que si f est convexe sur I, alors sa courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de ses cordes (une corde est un segment reliant deux points de la courbe).

Exemples :

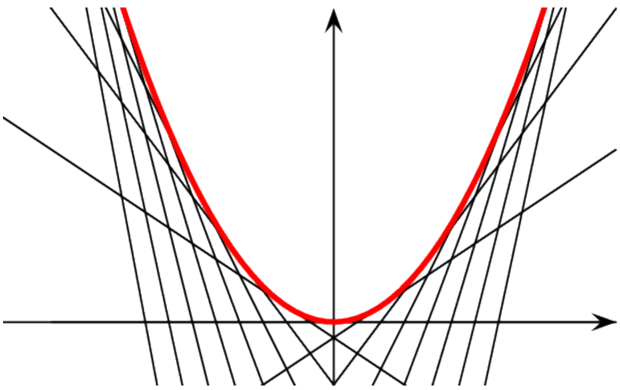
1. Les fonctions affines ($x \mapsto ax + b$) sont à la fois convexes et concaves sur$\mathbb{R}$.
2. La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction exp est
4. la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est

2) Tangentes et convexité :

a) Cas des fonctions dérivables :

Proposition 11 : Interprétation graphique

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I. On a :
f convexe sur $I \iff \mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes sur I.



On admet ce résultat, qui résulte du fait que si f est convexe et dérivable, alors f' est croissante...

b) Cas des fonctions deux fois dérivables

Proposition 12 : Caractérisation avec la dérivée seconde

Soit f une fonction à valeur réelle dérivable deux fois sur un intervalle I, avec telle que $\forall x \in I,\ f''(x) \geq 0$ alors f est convexe.

▷ *Preuve* :

Soit $c \in [a, b]$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en c a pour équation :

$$T_c : y = f'(c)(x-c) + f(c)$$

Posons $g(x) = f(x) - f'(c)(x-c) - f(c)$ et montrons que pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) \geq 0$.
Supposons $x > c$. On applique le TAF sur $[c, x]$ (f a les bonnes hypothèse) et il existe $\alpha \in]c, x[$ tel que $f(x) - f(c) = f'(\alpha)(x-c)$.
D'où $g(x) = f'(\alpha)(x-c) - f'(c)(x-c) = \underbrace{(f'(\alpha) - f'(c))}_{\geq 0 \text{ car } f \nearrow} \underbrace{(x-c)}_{\geq 0} \geq 0$.
Si $x < c$, on applique de même le TAF à $[x, c]$ et on obtient :
$g(x) = f'(\alpha)(x-c) - f'(c)(x-c) = \underbrace{(f'(\alpha) - f'(c))}_{\leq 0 \text{ car } f \nearrow} \underbrace{(x-c)}_{\leq 0} \geq 0$
Donc dans tous les cas, $g(x) \geq 0$: f est bien convexe. ◁

3) Exemples d'inégalités de convexité classiques

Propriété 3 : inégalités de convexité

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$
- $\forall x \in]-1, +\infty[,$ $\ln(1+x) \leq x$
- $\forall x \geq 0, \sin(x) \leq x$

IV Cas complexe

1) Ce qui ne change pas

On a vu que la définition de limite est inchangée pour les complexes, le module remplaçant la valeur absolue, et que cela revient à regarder les limites de la partie réelle et de la partie imaginaire.
On peut ainsi énoncer :

Définition :

soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{C}$. On note alors $f'(a)$ cette limite.
On dit que f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point $a \in I$.

On montre aisément que :

Propriété 4 :

$f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable sur I si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ sont des fonctions dérivables sur I en tant que fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

En conséquence de cette propriété, on a immédiatement :

Propriété 5 :

Si $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable sur I, alors $\bar{f}$ est dérivable également avec $\overline{f}' = \overline{f'}$

Remarques :

- Toutes les propriétés calculatoires et les formules de dérivation restent valables.
- On définit naturellement les notions de fonction de classe $\mathcal{C}^n$ à valeur dans $\mathbb{C}$.
- Les notions dérivées à droite et à gauche sont conservées.

2) Accroissements finis

Les notions de pentes et de croissance n'ont aucun sens dans $\mathbb{C}$. Par conséquent, le théorème de Rolle ne peut pas être démontré et s'avère être faux !

Exemple :
soit $f : x \mapsto e^{ix}$

De même, le théorème des accroissements finis est faux pour les fonctions complexes.

On garde tout de même le résultat sur les fonctions constantes :

Propriété 6 :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur I. Alors

$$f' = 0 \text{ si et seulement si } f \text{ est constante sur } I.$$

▷ *Preuve* : ◁

On peut également montrer l'inégalité des accroissements finis à l'aide d'intégrales (cf le chapitre concerné, à venir)

Proposition 13 :
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq M$.
Alors

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$