Chapitre 9 : Limites de fonctions - continuité
Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Déterminer les limites suivantes (si elles existent) :

1. $\lim_{x\to+\infty} x^5 - 2x^2 + 8x^8$
2. $\lim_{x\to-\infty} x^3 + x^2 + 5$
3. $\lim_{x\to-\infty} x^4 + \frac{1}{x} + 2$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 3x^2 - x^6}{7x + 8x^{12}}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - x^6}{7x + 8x^{12}}$
6. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$
7. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$
8. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^3 + 1}$

Exercice 2 :

Etudiez l'existence des limites des fonctions f suivantes au point précisé et donnez la limite lorsque c'est possible.

1. $f(x) = 2 - \sin(x)$ quand $x \to +\infty$
2. $f(x) = x(2 - \sin(x))$ quand $x \to +\infty$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - 3x$ quand $x \to -\infty$, puis quand $x \to +\infty$.
4. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} + 3x$ quand $x \to +\infty$, puis quand $x \to -\infty$.
5. $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$ quand $x \to 1$, puis quand $x \to +\infty$

Exercice 3 :

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + x^7 + 2}{e^{-x} + x^5 - 3}$
2. $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(2x)}{x - \pi}$
3. $\lim_{x\to+\infty} = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x$
4. $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$
5. $\lim_{x\to 0} \tan x \sin \frac{1}{x}$
6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(\cos(x))}{x}$

Exercice 4 :

Soit f une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$.
Montrez que f admet une limite en $+\infty$ si et seulement si f est constante.

Exercice 5 :

Etudiez la continuité des fonctions suivantes au point considéré.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \geq 2 \\ x + 3 & \text{si } x < 2 \end{cases}$. Continuité en 2 ?
2. $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(1) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. $f(x) = \frac{x^2 \ln(x)}{x - 1}$. Continuité en 1 ?
3. f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x - 1}$. Prolongement par continuité possible en 1 ?

Exercice 6 :

Etudiez les fonctions suivantes (domaine de définition, tableau de variation, limites, étude des branches infinies, asymptote, représentation graphique)

1) $f : x \mapsto f(x) = \frac{x^3}{(x - 1)^2}$ 2) $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante, telle que $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante.

Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8 : Algorithme de dichotomie et preuve du théorème des valeurs intermédiaires

Soit $a < b$ deux réels et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que $f(a)f(b) < 0$. Soient les suites a_n, b_n et c_n définies de la façon suivante :

On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si a_n et b_n existent, on pose $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et on pose :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = c_n & \text{si } f(a_n)f(c_n) < 0 \\ a_{n+1} = c_n \text{ et } b_{n+1} = b_n & \text{si } f(a_n)f(c_n) > 0 \\ \text{si } f(c_n) = 0, & \text{on arrête le calcul, et pour tout } m \geq n \text{ on pose } a_m = b_m = c_n. \end{cases}$$

1. On suppose que le calcul ne s'arrête pas. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   (i) $f(a_n)f(b_n) < 0$
   (ii) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ et $a_n < b_n$.
2. En déduire que a_n et b_n convergent vers la même limite $\alpha \in [a,b]$.
3. Justifiez que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n)f(b_n) = f(\alpha)^2$ et montrez que $f(\alpha) = 0$ (on pourra raisonner sur le signe de la limite).
4. En déduire le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 9 :

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue sur $[a,b]$. On veut montrer que nécessairement f admet au moins un point fixe, c'est à dire qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = x$.

Pour cela, on pose $g : x \to f(x) - x$.

1. Montrez que g est continue.
2. Montrez que $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$.
3. En déduire que f admet au moins un point fixe.
4. On suppose en plus que f est décroissante. Montrez qu'alors le point fixe est unique.

Exercice 10 :

Soit $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive sur $[1,2]$. Montrez qu'il existe deux constantes a et b, $0 < a \leq b$ telles que pour tout $x \in [1,2]$, $ax \leq f(x) \leq bx$.

Exercice 11 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Montrez que f est minorée et atteint son minimum.

Exercice 12 :

Déterminez l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x) = (f(x))^2$.

Exercice 13 :

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I à valeur dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

1. Montrez que f est continue.
2. On suppose que $f : [0,1] \to [0,1]$ et lipschitzienne avec $k \in]0,1[$
   a) Montrez que f admet un unique point fixe.
   b) Soit (u_n) une suite vérifiant $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrez que la suite est convergente vers l'unique point fixe de f.

Exercice 14 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 - x\ln x - 1$.

1. Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites en $+\infty$ et en 0.
2. Montrez que f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans un intervalle à préciser, et donner le tableau de variation de f^{-1}, avec les limites en ses bornes de définition.
3. Justifiez que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe x_n tel que $f(x_n) = n$. Déterminez x_0 et étudiez la monotonie de la suite (x_n), puis sa limite lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 15 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n définie par :

$$f_n : \begin{array}{ll} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^n + 2x^2 + x - 1 \end{array}$$

1. Montrez que pour tout $n \geq 1$, il existe un unique $x_n \in [0, 1/2]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrez que pour tout $n \geq 1$, $f_{n+1}(x_n) \leq 0$.
3. En déduire que la suite (x_n) est croissante et montrez qu'elle converge.
4. Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n$. En déduire la limite de (x_n).

Exercice 16 :

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)\cos x \qquad (E)$$

Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrez que f_1 est continue et vérifie l'équation (E).
2. Soit f une fonction continue qui vérifie la relation (E). Montrez qu'alors f vérifie également la relation suivante :
$$\text{pour tout } x \neq 0 \text{ et pour tout } n \geq 1,\quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$
3. Justifiez que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = x$.
4. En déduire une relation entre f, $f(0)$ et f_1.
5. Montrez que f est solution au problème considéré si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda f_1$.

Exercice 17 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$$

Montrez que f est constante.