Algèbre - Chapitre 10 : Espaces vectoriels - généralités
Algèbre - Chapitre 11 : Espaces vectoriels de dimension finie
Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Ecrire, si c'est possible, le "vecteur" u suivant comme combinaison linéaire des vecteurs v et w.

1. Dans $\mathbb{R}^3$: $u = (0, 5, -5)$ avec $v = (3, 1, 2)$, $w = (2, -1, 3)$
2. Dans $\mathbb{K}[X]$: $u = X^2 + 2X - 1$ avec $v = X^2 + 1$ et $w = X - 1$
3. Dans $\mathbb{R}^{]0,1[}$: $u : x \mapsto \dfrac{1}{x(x-1)}$ avec $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $w : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$
4. Dans $\mathbb{R}^3$: $u = (1, 2, 3)$ pour $v = (2, 4, -2)$, $w = (-3, -6, 3)$

Exercice 2 :

Soient x, y et z trois réels. Déterminez des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ de $\mathbb{R}^3$ qui ne dépendent pas de x, y et z et qui vérifient $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ dans les cas suivants (on pourra avoir besoin de moins de 3 vecteurs) :

1. $\vec{u} = (x, 3y, 2z)$
2. $\vec{u} = (x + y, y - 2z, x + y + z)$
3. $\vec{u} = (x, x, y + z)$
4. $\vec{u} = (y - x + 2z, z - y + 3x, x + 3y - 4z)$
5. $\vec{u} = (y, 4y, 2y)$
6. $\vec{u} = (x, x + y, y)$
7. $\vec{u} = (x + y, y + z, 0)$

Exercice 3 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'ensemble F considéré est un sous espace vectoriel de l'ensemble E proposé

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 2y = 0\}$ avec $E = \mathbb{R}^2$
2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 2y = 3\}$ avec $E = \mathbb{R}^2$
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x + y\}$ avec $E = \mathbb{R}^3$
4. F est l'ensemble des polynômes qui admettent 0 comme racine multiple. ($E = \mathbb{K}[X]$).
5. F est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. E est l'ensemble des fonctions définie sur $\mathbb{R}$.
6. F est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, avec I un intervalle et $E = \mathbb{R}^I$.
7. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$ avec $E = \mathbb{R}^2$
8. F est l'ensemble des suites réelles convergentes. E l'ensemble des suites.
9. $F = \{(u_n); \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2\}$. E l'ensemble des suites réelles.
10. F est l'ensemble des suites convergentes. E l'ensemble des suites.
11. F est l'ensemble des suites de limite nulle. E l'ensemble des suites.
12. F est l'ensemble des suites qui tendent vers 0, ou qui divergent vers $+\infty$ ou $-\infty$. E est l'ensemble des suites.
13. $F = \{(a + b, a - b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ avec $E = \mathbb{R}^2$
14. soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); MA = AM\}$. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4 :

Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous espaces vectoriels de E.
Montrez que $F \cup G$ est un sous espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5 :

Les familles suivantes sont-elles des familles libres, liées ? Sont-elles des bases de l'espace vectoriel E proposé ?

1. Dans $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = ((1,3),(2,1))$.
2. Dans $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{G} = ((2,3,4),(1,5,7))$.
3. Dans $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{H} = ((9,-3,7),(1,8,8),(5,-5,1))$
4. Dans $E = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{I} = ((2,1,3,4),(0,1,0,1),(2,2,3,0))$
5. Dans E l'espace vectoriel des suites réelles, $\mathcal{J} = ((u_n),\ (v_n),\ (w_n))$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n, v_n = 2^n\ ,\ w_n = 3^n$
6. $\mathcal{K} = (X^2,\ X(1-X),\ (1-X)^2)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.
7. Dans $E = \mathbb{R}^{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$. $\mathcal{M} = (\cos,\ \tan,\ \sin)$
8. Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$. $\mathcal{L} = (\ln,\ \exp,\ \sin)$

Exercice 6 :

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$.

1. Montrez que l'ensemble F des polynômes de E qui admettent 1 comme racine est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Déterminez une base de F et sa dimension.

Exercice 7 :

Soit l'ensemble E défini par :

$$E = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}); \exists a,b,c \in \mathbb{R} \text{ tels que } f : x \mapsto (ax^2+bx+c)\sin(x)\}$$

Montrez que E est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$, déterminez en une base et donnez $dim(E)$.

Exercice 8 :

Soient $P_1 = X^2+2X+1$, $P_2 = X^2+X+1$ et $P_3 = X^2+X$.
Montrez que (P_1,P_2,P_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Exercice 9 :

On définit les applications $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$ par :
$\forall x > 0,\ f_1(x) = \ln x,\ f_2(x) = e^x,\ f_3(x) = e^{x-1},\ f_4(x) = \ln(4x^3),\ f_5(x) = 1$.

1. La famille $(f_1, f_2, \ldots, f_5)$ est-elle libre ?
2. Soit l'espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, \ldots, f_5)$.
   Donner une sous-famille de $(f_1, f_2, \ldots, f_5)$ qui soit une base de E.

Exercice 10 :

Soient les ensembles

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + z - t = 0\}$$
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = y\}$$

1. Montrez que E et F sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de chacun de ces espaces et précisez leur dimension.
3. Déterminez une base de $E \cap F$. L'intersection des bases est-elle une base de l'intersection ?

Exercice 11 :

Soit l'espace vectoriel E engendré par $(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)$ où les applications f_1 à f_4 sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \cos(2x),\ f_2(x) = \sin(2x),\ f_3(x) = \cos^2 x,\ f_4(x) = \sin^2 x$$

1. Déterminer une base de E
2. La famille $(f_0; f_1; f_2)$, où f_0 est l'application constante : $x \longmapsto 1$, est-elle également une base de E ?

Exercice 12 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = Vect((1, 2, 3))$ et $G = Vect((1, 1, 1))$
Montrez que la somme $F + G$ est directe.

Exercice 13 :

Dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 2z = 0\}$ et $G = Vect((1, 1, 1))$.
Montrez que $E = F \oplus G$

Exercice 14 :

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$, déterminez un supplémentaire du plan vectoriel
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$$
2. Déterminez dans $\mathbb{K}_3[X]$ un supplémentaire de $\mathbb{K}_2[X]$.

Exercice 15 :

Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Montrez que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sous espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 16 :

Soit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u = (1, -1, 1), v = (0, -1, 2), w = (1, -2, 3)$$

1. Quel est le rang de la famille (u, v, w) ? Donnez une base de $F = Vect(u, v, w)$.
2. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}$.
   a) Montrez que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donnez en une base.
   b) Montrez que $F = G$.
3. Compléter la famille (u, v) en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 17 :

On considère les sous espaces vectoriels suivants :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; x - y - 2t = 0 \text{ et } x + t = 0\}$$

$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; x - z + t = 0 \text{ et } y + z = 0\}$$

1. Trouver une base (e_1, e_2) de F et une base (e_3, e_4) de $\mathbb{G}$.
2. Calculer $F \cap G$.
3. En déduire que (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre et constitue une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 18 :

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x - y = z\}$.

1. Déterminez une base de E.
2. Trouver un supplémentaire de E.

Exercice 19 :

Soient les ensembles E et F définis par

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$$

et

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 0\}$$

Soit $w = (-1, 1, 1)$ et $G = \mathrm{Vect}(w)$.

1. Montrez que E et F sont des sous espaces vectoriels dont on déterminera des bases et les dimensions.
2. A-t-on $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$?
3. En notant (u, v) la base de F obtenue en 1, montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?

Exercice 20 :

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on définit les ensembles

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M^T = M\}$$

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M^T = -M\}$$

L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices symétriques, et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est appelé ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrez que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous espaces vectoriels.
2. Montrez qu'ils sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$