Devoir Surveillé n° 7.
le 16 février.

Exercice 1

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1}.$$

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale

$$I_k = \int_0^1 t^{2k} \ln t \, \mathrm{d}t.$$

Q2. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que :

$$\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}.$$

On pourra utiliser librement que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2

On note $I =]0\,;+\infty[$ et on définit pour n entier naturel non nul et pour $x \in I$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} - 2\mathrm{e}^{-2nx}$.

Q4. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, les fonctions f_n sont intégrables sur I et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x$. Que vaut alors la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x \right)$?

Q5. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur I. Déterminer sa fonction somme S et démontrer que S est intégrable sur I. Que vaut alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x$?

Q6. Donner, sans aucun calcul, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \, \mathrm{d}x \right)$.

Problème

Dans tout le problème, α est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On pose :

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q9. Démontrer que $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

Q10. Démontrer que $J(\alpha) = I(1-\alpha)$.

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q11. 1re tentative
Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $f_n(x) = (-1)^n x^{n+\alpha-1}$. Montrer que :

$$\forall x \in]0,1[, \ \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1[$?

Q12. 2e tentative
Pour tout $x \in]0,1[$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1}$$

À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$I(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x$$

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q13. En déduire que :

$$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \cos(nx)}{\alpha^2 - n^2} \right).$$

Q14. Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

et

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt} \mathrm{d}t$$

Q15. Démontrer que Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Q16. Démontrer que f_α est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Q17. Démontrer que f_α est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

Q18. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha(x)$.

Q19. Démontrer que $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En déduire :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t$$

Partie III - Vers la formule des compléments

Q20. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, démontrer que :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

Q21. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose :

$$g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t.$$

Vérifier que g_α est une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.
En déduire que : $\forall x \in]0, +\infty[, f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

Q22. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} \mathrm{d}t = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t$$

Q23. Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Q24. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$$