Fonction de Wallis

1 Calcul de $\sigma(1)$

1 $\triangleright$ On note D l'ensemble de définition de σ.

Méthode 1 : Soit $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$, on a par croissance comparée : $\left|\dfrac{x^k}{k^2}\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$

donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{x^k}{k^2}$ diverge grossièrement d'où $\mathrm{D} \subset [-1,1]$.

Par ailleurs, pour $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $x \mapsto \dfrac{x^k}{k^2}$ est continues sur l'intervalle $[-1,1]$ (i).

De plus $\forall x \in [-1,1]$, $\left|\dfrac{x^k}{k^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge selon ce cher Georges.

Ainsi la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \left(x \mapsto \frac{x^k}{k^2}\right)$ converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$.

Méthode 2 : σ est la somme d'une série entière de la forme $\sum k^p x^k$ avec $p = -2 \in \mathbb{R}$. Le rayon de convergence vaut donc 1. On a donc

$$]-1,1[\subset \mathrm{D} \subset [-1,1]$$

et σ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$ car $\mathcal{C}^\infty$ sur icelui. Comme $2 > 1$, les séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1^k}{k^2} = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k^2}$ convergent absolument selon Riemann donc convergent.

Ainsi $\mathrm{D} = [-1,1]$ et selon le lemme d'Abel radial, on a alors

$$\lim_{x\to 1^-} \sigma(x) = \lim_{x\to 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1^k}{k^2} = \sigma(1)$$

Ainsi σ est continue en 1 et c'est analogue en -1.

Conclusion : $\boxed{\text{le domaine de définition de } \sigma \text{ est } [-1,1] \text{ et } \sigma \text{ est continue sur icelui}}$

2 $\triangleright$ Soit α et $\beta \in \mathbb{R}$. On note $\mathrm{P} = \alpha \mathrm{X}^2 + \beta \mathrm{X}$. Ainsi $\mathrm{P}' = 2\alpha\mathrm{X} + \beta$ et $\mathrm{P}'' = 2\alpha$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par intégrations par parties successives (avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$), on a

$$\int_0^\pi \mathrm{P}(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \left[\mathrm{P}(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi \mathrm{P}'(t)\frac{\sin(nt)}{n}\mathrm{d}t = 0 + \left[\mathrm{P}'(t)\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi \mathrm{P}''(t)\frac{\cos(nt)}{n^2}\mathrm{d}t$$

or $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{P}''(t)\frac{\cos(nt)}{n^2}\mathrm{d}t = \left[2\alpha\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_{t=0}^{t=\pi} = 0$ et $\displaystyle\left[\mathrm{P}'(t)\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{(-1)^n\mathrm{P}'(\pi) - \mathrm{P}'(0)}{n^2}$ donc

$$\int_0^\pi \left(\alpha t^2 + \beta t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n\left(2\pi\alpha + \beta\right) - \beta}{n^2}$$

En prenant $\beta = -1$ et $\alpha = \dfrac{1}{2\pi}$, on a $(-1)^n\left(2\pi\alpha + \beta\right) - \beta = 1$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}}$$

Soit $t \in]0, \pi]$. On a donc $t/2 \in]0, \pi/2]$ et ainsi $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$ et les termes de l'égalité existent bien.
Montrons l'égalité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

L'initialisation est triviale car $\displaystyle\sum_{k=1}^{0} \cos(kt) = 0 = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$.

Pour l'hérédité, on considère $n \in \mathbb{N}$ tel que l'égalité soit vraie au rang n. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} + \cos\left((n+1)t\right) = \frac{\sin\left((n+1)t - \frac{t}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left((n+1)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

Or $\sin\left((n+1)t - \frac{t}{2}\right) = \sin\left((n+1)t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \cos\left((n+1)t\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ donc

$$\sin\left((n+1)t - \frac{t}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left((n+1)t\right) = \sin\left((n+1)t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left((n+1)t\right) = \sin\left((n+1)t + \frac{t}{2}\right)$$

On a donc l'égalité au rang $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+3)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

On peut donc conclure que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$, on a bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}}$$

Comme $\cos(kt) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right)$, *on aurait pu utiliser une somme géométrique de raison* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq 1$ *car* $t \in]0, \pi]$.

3 ▷ On effectue une intégration par parties avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: φ et $t \mapsto \dfrac{-\cos(xt)}{x}$:

$$\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = \left[\varphi(t)\frac{-\cos(xt)}{x}\right]_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^{\pi} \varphi'(t)\frac{\cos(xt)}{x}\mathrm{d}t = \frac{\varphi(0) - \varphi(\pi)\cos(\pi x) + \displaystyle\int_0^{\pi} \varphi'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t}{x}$$

Ainsi $\displaystyle\left|\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)\cos(\pi x)| + \left|\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t\right|}{x}$ donc

$$\left|\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| \cdot |\cos(\pi x)| + \displaystyle\int_0^{\pi} \left|\varphi'(t)\right| \cdot |\cos(xt)|\,\mathrm{d}t}{x} \leqslant \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| + \displaystyle\int_0^{\pi} \left|\varphi'(t)\right|\mathrm{d}t}{x}$$

or $\displaystyle\frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| + \displaystyle\int_0^{\pi} \left|\varphi'(t)\right|\mathrm{d}t}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$,

alors selon le théorème des gendarmes, on a montré le lemme de Riemann-Lebesgue pour φ de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = 0}$$

On a $\sigma(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ donc selon la première égalité de la question 2 :

$$\sigma(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\mathrm{d}t$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{(2n+1)t}{2\frac{t}{2}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 2n+1$$

Comme $t \mapsto \dfrac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ se prolonge par continuité en 0, avec la deuxième égalité de la question 2 on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}t$$

On pose $g : t \mapsto \dfrac{t^2 - 2\pi t}{4\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ qui se prolonge par continuité sur $[0,\pi]$ car $g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-2\pi t}{2\pi t} = -1$.
En notant φ le prolongement continu de g sur $[0,\pi]$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) \varphi(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2 - 2\pi t}{4\pi}\right) \mathrm{d}t$$

On a φ continue sur $[0,\pi]$ (i) et φ est dérivable sur $]0,\pi]$ (ii) et

$$\forall t \in]0,\pi], \varphi'(t) = \frac{(2t - 2\pi)\sin(t/2) - (1/2)(t^2 - 2\pi t)\cos(t/2)}{4\pi \sin^2(t/2)} = \frac{4(t-\pi)\sin(t/2) - (t^2 - 2\pi t)\cos(t/2)}{8\pi \sin^2(t/2)}$$

Quand $t \longrightarrow 0$, on a

$$4(t-\pi)\sin(t/2) - (t^2 - 2\pi t)\cos(t/2) = 4t\left(t/2 + o\left(t^2\right)\right) - 4\pi\left(t/2 + o\left(t^2\right)\right) - t^2\left(1 + o(t)\right) + 2\pi t\left(1 + o\left(t\right)\right)$$

Ainsi $4(t-\pi)\sin(t/2) - (t^2 - 2\pi t)\cos(t/2) = t^2 + o(t^2) \sim t^2$ d'où $\varphi'(t) \sim \dfrac{t^2}{8\pi (t/2)^2}$

On a donc $\varphi'(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2\pi}$ $\quad (iii)$
Avec $(i), (ii)$ et (iii), le théorème du prolongement de la dérivée s'applique :

$$\varphi \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } \varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \varphi'(t)$$

donc φ' est continue en 0 or φ' est continue sur $]0,\pi]$.
Ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et le lemme de Riemann-Lebesgue s'applique :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin\left((2n+1)t\right) \mathrm{d}t = 0$$

donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\mathrm{d}t = 0 - \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2 - 2\pi t}{4\pi}\right) \mathrm{d}t$. Ainsi

$$\sigma(1) = \int_0^{\pi} \left(\frac{2\pi t - t^2}{4\pi}\right) \mathrm{d}t = \left[\frac{3\pi t^2 - t^3}{12\pi}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{3\pi^3 - \pi^3}{12\pi} - 0$$

On a bien $\boxed{\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}}$

2 Équivalents

4 ▷ Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto (\sin(t))^x = \exp(x \ln(\sin(t)))$ est continue sur $]0, \pi/2]$. Or

$$(\sin(t))^x \underset{x \to 0^+}{\sim} t^x = \frac{1}{t^{-x}}$$

Par équivalence, la fonction $t \mapsto (\sin(t))^x$ est intégrable en 0 si et seulement si $t \mapsto \dfrac{1}{t^{-x}}$ l'est.
Ainsi $t \mapsto (\sin(t))^x$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$ si et seulement si $-x < 1$.
Comme $t \mapsto (\sin(t))^x$ est positive sur $]0, \pi/2]$, $\boxed{\text{le domaine de définition de } f \text{ est I}}$
Soit $x \in \mathrm{I}$. On a $x + 2 \in \mathrm{I}$.
On effectue alors une intégration par parties, sous réserve de convergence du bloc tout intégré :

$$f(x+2) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{x+1} \sin(t) \, \mathrm{d}t = \left[-(\sin(t))^{x+1} \cos(t)\right]_{t \to 0}^{t=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (x+1)(\sin(t))^x \cos^2(t) \, \mathrm{d}t$$

Comme $x + 1 > 0$, on a $\left[-(\sin(t))^{x+1} \cos(t)\right]_{t \to 0}^{t=\pi/2} = 0$ ce qui valide l'intégration par parties.
Comme $\cos^2 = 1 - \sin^2$ et que $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x \cos^2(t) \, \mathrm{d}t$ converge, alors on a

$$f(x+2) = (x+1) \left(\int_0^{\pi/2} (x+1)(\sin(t))^x \, \mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{x+2} \, \mathrm{d}t \right) = (x+1)f(x) - (x+1)f(x+2)$$

On a bien $\boxed{(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)}$ (1)

5 ▷ On pose $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I} \times]0, \pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & (\sin(t))^x \end{array} \right.$

(i) Soit $t \in]0, \pi/2]$. La fonction $g(\cdot, t) : x \longmapsto \exp(x \ln(\sin(t)))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I de dérives successives :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\cdot, t) : x \longmapsto \ln(\sin(t)) \exp(x \ln(\sin(t))) = \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\cdot, t) : x \longmapsto \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^x$$

(ii) Soit $x \in \mathrm{I}$. Les fonctions $g(x, \cdot)$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, \cdot)$ sont continues sur $]0, \pi/2]$ (argument inutile !)
La fonction $g(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$ selon la question précédente.
Quand $t \longrightarrow 0^+$, on a $\ln(\sin(t)) (\sin(t))^x = \ln(\sin(t)) (\sin(t))^{\frac{x+1}{2}} (\sin(t))^{\frac{x-1}{2}}$
On a $\frac{x+1}{2} > 0$ donc par croissance comparée et par composition $\ln(\sin(t)) (\sin(t))^{\frac{x+1}{2}} \longrightarrow 0$
Ainsi $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t) = o\left((\sin(t))^{\frac{x-1}{2}}\right)$
Comme $\frac{x-1}{2} > -1$, la fonction $t \mapsto (\sin(t))^{\frac{x-1}{2}}$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$ comme en question 3.
Par comparaison la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$.

(iii) Soit $a < b$ dans I. On a alors l'hypothèse de domination :

$$\forall x \in [a, b], \ \forall t \in]0, \pi/2], \ \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^x \leqslant \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^a$$

avec la fonction $t \longmapsto \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^a$ intégrable sur $]0, \pi/2]$, comme en **(ii)**.

Avec **(i)**, **(ii)** et **(iii)**, le théorème de la classe $\mathcal{C}^2$ pour les intégrales s'applique : $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur I}}$
De plus pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x \, \mathrm{d}t \leqslant 0 \text{ et } f''(x) = \int_0^{\pi/2} \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^x \, \mathrm{d}t \geqslant 0$$

ainsi $\boxed{f \text{ est décroissante et convexe sur I}}$

6 ▷ Quand $x \longrightarrow -1$, $f(x) = \dfrac{(x+2)f(x+2)}{x+1}$ selon 4 et $(x+2)f(x+2) \longrightarrow 1 \times f(1)$ car f continue sur I et $1 \in$ I.

Par ailleurs $f(1) = [-\cos(t)]_{t\to 0}^{t=\pi/2} = 1 \neq 0$, on peut conclure que $\boxed{f(x) \underset{x\to -1}{\sim} \dfrac{1}{x+1}}$

7 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $n \in$ I et en multipliant par $f(n+1)$, on a : $(n+1)f(n)f(n+1) = (n+2)f(n+1)f(n+2)$

Ainsi la suite $((n+1)f(n)f(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Comme $f(0) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)f(n)f(n+1) = 1f(0)f(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

On peut conclure que $\boxed{f(n)f(n+1) = \dfrac{\pi}{2(n+1)}}$

Comme f est décroissante et positive, on a donc $f(n+1)^2 \leqslant \dfrac{\pi}{2(n+1)} \leqslant f(n)^2$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\pi}{2(n+1)} \leqslant f(n)^2 \leqslant \dfrac{\pi}{2n}$ ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \leqslant f(n) \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

Soit $x \geqslant 1$. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. On a donc $1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$. Ainsi

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(\lfloor x \rfloor + 2)}} \leqslant f(\lfloor x \rfloor + 1) \leqslant f(x) \leqslant f(\lfloor x \rfloor) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2\lfloor x \rfloor}}$$

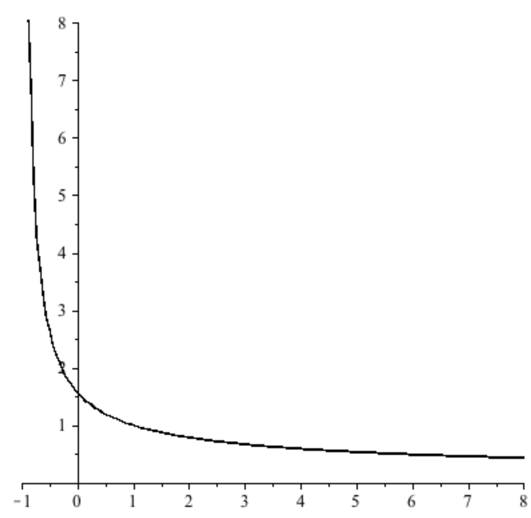
Or $x - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lfloor x \rfloor + 2 \leqslant x + 2$

Quand $x \longrightarrow +\infty$, on a $x - 1 \sim x \sim x + 2$, d'où par encadrement d'équivalents, on a $\lfloor x \rfloor \sim x$ et $\lfloor x \rfloor + 2 \sim x$.

À nouveau par encadrement d'équivalents, on a bien $\boxed{f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}}$

8 ▷ Sur le graphique doivent apparaître les points $(0, f(0)) = (0, \pi/2)$, $(1, f(1)) = (1, 1)$, les asymptotes d'équations $x = -1$ et $y = 0$.

On observera que f est décroissante et convexe.



Il n'est pas aisé de faire apparaître les équivalents sur un graphique surtout à main levée.

3 Développement en série entière

9 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n$ est continue sur $]0, \pi/2]$.
Quand $t \longrightarrow 0^+$, on a $\sqrt{\sin(t)}(\ln(\sin(t)))^n \longrightarrow 0$ par croissance comparée.
or $\sin(t) \sim t$, donc $\sqrt{t}(\ln(\sin(t)))^n \longrightarrow 0$
D'où $(\ln(\sin(t)))^n = o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$ or $t \mapsto \frac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable en 0.
Par comparaison à une fonction intégrable, $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$.
Ainsi $\boxed{\text{l'intégrale généralisée } \mathrm{D}_n \text{ converge absolument donc converge}}$
Le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - u$; $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$ nous donne : $\mathrm{D}_1 = -\displaystyle\int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin(\pi/2 - u))\mathrm{d}u$
On a bien $\boxed{\mathrm{D}_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t}$

10 ▷ En utilisant 5, on a $f'(0) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\ \mathrm{d}t = \mathrm{D}_1$ et $f'(1) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\sin(t)\ \mathrm{d}t$.
Avec 9 et en effectuant le changement de variable $u = 2t$; $\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}t$, on a

$$2\mathrm{D}_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)\cos(t))\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\ \mathrm{d}u - \frac{\ln(2)\pi}{2}$$

En effectuant le changement de variable $u = \pi - t$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, on a :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))\ \mathrm{d}u = -\int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin(\pi - t))\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\ \mathrm{d}t = \mathrm{D}_1$$

donc $2\mathrm{D}_1 = \dfrac{2}{2}\mathrm{D}_1 - \dfrac{\ln(2)\pi}{2}$. Ainsi $\boxed{f'(0) = \mathrm{D}_1 = -\dfrac{\ln(2)\pi}{2}}$
On effectue une intégration par parties sous réserve :

$$f'(1) = [(1 - \cos(t))\ln(\sin(t))]_{t\to 0}^{t=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos(t))\cos(t)}{\sin(t)}\ \mathrm{d}t$$

On a vu en 9 que $\ln(\sin(t)) \underset{t\to 0^+}{=} o\left(1/\sqrt{t}\right)$ or $1 - \cos(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^2/2$
d'où $(1 - \cos(t))\ln(\sin(t)) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ et $[(1 - \cos(t))\ln(\sin(t))]_{t\to 0}^{t=\pi/2} = 0$; ce qui valide l'intégration par parties.
On avait choisi la seule primitive qui pouvait convenir.
On a donc avec le changement de variable $u = \cos(t)$; $\mathrm{d}u = -\sin(t)\mathrm{d}t$:

$$f'(1) = -\int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos(t))\cos(t)}{1 - \cos(t)^2}\sin(t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{1 + \cos(t)}\sin(t)\ \mathrm{d}t = +\int_1^0 \frac{u}{1 + u}\ \mathrm{d}u = \int_0^1 \left(\frac{1}{u + 1} - 1\right)\ \mathrm{d}u$$

Ainsi $f'(1) = [\ln|u + 1| - u]_{u=0}^{u=1} = \ln(2) - 1 - \ln(1) + 0$
On peut conclure que $\boxed{f'(1) = \ln(2) - 1}$

11 $\triangleright$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $t \mapsto -\ln(\sin(t))$ est strictement décroissante (par composition) et $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$

Par ailleurs, on a : $-\ln(\sin(\pi/2)) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} (-\ln(\sin(t))) = +\infty$.

Ainsi cette application induit une bijection de $]0, \pi/2]$ vers $[0, +\infty[$.

On effectue le changement de variable $u = -\ln(\sin(t))$; $\mathrm{d}u = \frac{-\cos(t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t$

Or pour $t \in]0, \pi/2[$, on a $\cos(t) > 0$ et donc

$$\frac{\sin(t)}{-\cos(t)} = -\frac{\sin(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} = \frac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2u}}} = \frac{-1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}$$

d'où $\mathrm{D}_n = \displaystyle\int_{+\infty}^{0} (-u)^n \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}} = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\mathrm{d}u$

ce qui donne $\boxed{(-1)^n\mathrm{D}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\ \mathrm{d}u}$

La fonction $u \mapsto u^{n+1}\mathrm{e}^{-u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable en $+\infty$ car $u^{n+1}\mathrm{e}^{-u} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(1/u^2\right)$ par croissance comparée.

Donc $u \mapsto u^{n+1}\mathrm{e}^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et par intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} u^{n+1}\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u = \left[(n+1)u^n\mathrm{e}^{-u}\right]_{u=0}^{u\to+\infty} + (n+1)\int_0^{+\infty} u^n\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u = (n+1)\int_0^{+\infty} u^n\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u$$

Ainsi par récurrence immédiate

$$\int_0^{+\infty} u^n\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u = n!\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u = n!\left[-\mathrm{e}^{-u}\right]_{u=0}^{u\to+\infty} = n!$$

Or $(-1)^n\mathrm{D}_n - \displaystyle\int_0^{+\infty} u^n\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} u^n\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}} - \frac{1}{\mathrm{e}^u}\right)\ \mathrm{d}u$. Ainsi

$$(-1)^n\mathrm{D}_n - n! = \int_0^{+\infty} u^n\left(\frac{\mathrm{e}^u - \sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}{\mathrm{e}^u\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\right)\ \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\mathrm{e}^u\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}\left(\mathrm{e}^u + \sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}\right)}\ \mathrm{d}u$$

Le calcul est licite car la quantité conjuguée : $\mathrm{e}^u + \sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1} \geqslant \sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1} > 0$, pour $u > 0$.

Par calcul dans $[0, +\infty]$ car les intégrandes sont positives, on a

$$|(-1)^n\mathrm{D}_n - n!| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\mathrm{e}^u\left(\mathrm{e}^{2u}-1\right)}\ \mathrm{d}u \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\mathrm{e}^u\,(2u)}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^{n-1}\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u = \frac{(n-1)!}{2} < +\infty$$

On a utilisé l'inégalité de convexité $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^t - 1 \geqslant t > 0$ d'où

$$(-1)^n\mathrm{D}_n - n! \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left((n-1)!\right)$$

or $(n-1)! \underset{n\to+\infty}{=} o\,(n!)$ ainsi

$$(-1)^n\mathrm{D}_n = n! + \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$$

On conclut : $\boxed{\mathrm{D}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n!}$

12 ▷ Soit $x \in]-1,1[$. En utilisant le développement en série entière de l'exponentielle, on a

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \exp\left(x\ln(\sin(t))\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n \mathrm{d}t$$

(i) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a vu en 9 que $t \mapsto \dfrac{\ln(\sin(t))^n}{n!}$ est continue et intégrable sur $]0,\pi/2]$.

Il en est donc de même pour $t \mapsto \dfrac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n$ est continue et intégrable sur $]0,\pi/2]$.

(ii) La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(t \mapsto \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n\right)$ converge simplement sur $]0,\pi/2]$ de somme $t \mapsto \exp\left(x\ln(\sin(t))\right)$ et $t \mapsto \exp\left(x\ln(\sin(t))\right)$ continue sur $]0,\pi/2]$ (argument inutile)

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n$ est de signe constant sur $]0,\pi/2]$ (celui de $(-x)^n$). Ainsi

$$\int_0^{\pi/2} \left|\frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n\right| \mathrm{d}t = \left|\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n \mathrm{d}t\right| = \frac{\left|\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))^n \mathrm{d}t\right|}{n!} \cdot |x^n| = \frac{|\mathrm{D}_n|}{n!} \cdot |x|^n$$

Selon 11, on a $\dfrac{|\mathrm{D}_n|}{n!} \cdot |x|^n \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^n$ et la série géométrique $\displaystyle\sum_n |x|^n$ converge absolument donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \left|\frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n\right| \mathrm{d}t < +\infty$$

Avec **(i)**, **(ii)** et **(iii)**, le théorème d'intégration terme à terme s'applique ce qui nous donne l'existence des membres dans $\mathbb{R}$ et l'égalité

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{D}_n}{n!} x^n$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est bien développable en série entière sur }]-1,1[}$

4 Convergence de suite de fonctions

13 ▷ On a $\forall x \in \mathbb{R},\ a^2\cos^2(x) + b^2\sin^2(x) > 0$ car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, $a^2 > 0$ et $b^2 > 0$.

Ainsi par composition $\boxed{\Psi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'une part on a

$$\Psi'(x) = \frac{2\left(b^2 - a^2\right)\cos(x)\sin(x)}{a^2\cos^2(x) + b^2\sin^2(x)} = \frac{\left(b^2 - a^2\right)\sin(2x)}{a^2 + \left(b^2 - a^2\right)\sin^2(x)}$$

D'autre part, comme $a > 0$ et $b > 0$, on a $b - a < a + b$ et $a - b < a + b$ d'où ρ est bien défini et

$$\left|\rho \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right| = \left|\frac{b-a}{b+a}\right| \cdot \left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right| = \max\left\{\frac{b-a}{b+a}, \frac{a-b}{b+a}\right\} < 1$$

Ainsi la série géométrique $\sum_{k\geqslant 0}\left(\rho \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right)^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\rho^k\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\rho \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right)^k=\frac{1}{1-\rho\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}=\frac{1-\rho\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{\left(1-\rho\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right)\left(1-\rho\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)}$$

En prenant les parties imaginaires puis en multipliant par $(b+a)^2\,/\,(b+a)^2$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\rho^k\sin\left(2kx\right)=\frac{-\rho\sin(-2x)}{1-\rho\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}\right)+\rho^2}=\frac{\rho\sin(2x)}{1-2\cos(2x)\rho+\rho^2}=\frac{(b-a)(b+a)\sin(2x)}{(b+a)^2-2\cos(2x)(b-a)(b+a)+(b-a)^2}$$

Comme $\sin(0)=0$, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\sin\left(2kx\right)=\frac{(b^2-a^2)\sin(2x)}{2a^2+2b^2-2(b^2-a^2)\left(1-2\sin^2(x)\right)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(b^2-a^2)\sin(2x)}{a^2+(b^2-a^2)\sin^2(x)}$$

On a bien $\boxed{\Psi'(x)=4\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\sin(2kx)}$

14 ▷ Soit $x\in\mathbb{R}$. Comme Ψ' est continue sur $\mathbb{R}$, on a alors par le théorème fondamental de l'analyse :

$$\Psi(x)-\Psi(0)=\int_0^x\Psi'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k4\sin(2kt)\right)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{k=1}^{+\infty}f_k(t)\right)\mathrm{d}t$$

en ayant posé pour $k\in\mathbb{N}^*$, $f_k:t\mapsto 4\rho^k\sin(2kt)$.
Or les f_k sont continues sur $\mathbb{R}$ (i)
de plus, $\forall t\in\mathbb{R}$, $|f_k(t)|\leqslant 4\rho^k$ et la série géométrique $\sum\rho^k$ converge car $\rho\in]-1,1[$.
donc la série $\sum_{k\geqslant 1}f_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ (ii).
Avec (i) et (ii), on peut intervertir somme de série et intégrale sur tout segment de $\mathbb{R}$ par théorème de cours. Ainsi

$$\Psi(x)=\Psi(0)+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\int_0^x f_k(t)\mathrm{d}t\right)=\ln(a^2)+\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{-4\rho^k\cos(2kt)}{2k}\right]_{t=0}^{t=x}=2\ln(a)-2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\rho^k\cos(2kx)}{k}-\frac{\rho^k}{k}\right)$$

Or avec le développement en série entière de $t\mapsto\ln(1+t)$ sur $]-1,1[$, on a

$$\ln(1-\rho)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}(-\rho)^k}{k}=-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k}{k}$$

Ainsi

$$\Psi(x)=2\ln(a)-2\ln(1-\rho)-2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k\cos(2kx)}{k}=2\ln\left(\frac{a}{1-\rho}\right)-2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k\cos(2kx)}{k}$$

Or $\dfrac{a}{1-\rho}=\dfrac{a}{1-\frac{b-a}{a+b}}=\dfrac{a(a+b)}{(a+b)-(b-a)}=\dfrac{a+b}{2}$ d'où

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \Psi(x)=2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)-2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k}$$

15 ▷ On a donc $\forall x \in [0,\pi],\ \Psi^2(x) = 2\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\Psi(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-2)\frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k\Psi(x)$

Or les fonctions $u_0 : x \mapsto 2\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\Psi(x)$ et $u_k : x \mapsto (-2)\dfrac{\cos(2kx)}{k}\rho^k\Psi(x)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ sont continues sur $[0,\pi]$.

De plus comme Ψ est bornée sur $[0,\pi]$ car continue sur ce segment, on peut montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[0,\pi]$ de somme Ψ^2.

Ainsi par théorème de cours :

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2\mathrm{d}x = \int_0^\pi 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\Psi(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^\pi (-2)\frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k\Psi(x)\mathrm{d}x$$

Ainsi

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2\mathrm{d}x = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^\pi \Psi(x)\mathrm{d}x - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k}{k}\int_0^\pi \cos(2kx)\Psi(x)\mathrm{d}x \ (\star)$$

À l'aide d'une nouvelle convergence uniforme de série de fonctions, on a

$$\int_0^\pi \Psi(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k}{k}\int_0^\pi \cos(2kx)\mathrm{d}x = 2\pi\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

On s'est servi de $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^\pi \cos(2px)\mathrm{d}x = 0$ (fonction π-périodique de moyenne nulle)

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a à l'aide d'une autre convergence uniforme :

$$\int_0^\pi \cos(2kx)\Psi(x)\mathrm{d}x = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^\pi \cos(2kx)\mathrm{d}x - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\rho^n}{n}\int_0^\pi \cos(2kx)\cos(2nx)\mathrm{d}x$$

or $\displaystyle\int_0^\pi \cos(2kx)\mathrm{d}x = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$2\int_0^\pi \cos(2kx)\cos(2nx)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos\left(2(k+n)x\right)\mathrm{d}x + \int_0^\pi \cos\left(2(k-n)x\right)\mathrm{d}x$$

Ainsi si $n \neq k$ on a $\displaystyle\int_0^\pi \cos(2kx)\cos(2nx)\mathrm{d}x = 0$ et

$$2\int_0^\pi \cos(2kx)\cos(2kx)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos\left(4kx\right)\mathrm{d}x + \int_0^\pi 1\mathrm{d}x = \pi$$

donc $\displaystyle\int_0^\pi \cos(2kx)\Psi(x)\mathrm{d}x = -\pi\frac{\rho^k}{k}$ puis en reprenant $(\star)$

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2\mathrm{d}x = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\times 2\pi\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k}{k}\left(-\pi\frac{\rho^k}{k}\right) = 4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^{2k}}{k^2}$$

On conclut enfin que

$$\boxed{\int_0^\pi \Psi(x)^2\mathrm{d}x = 4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sigma\left(\rho^2\right)}$$

16 ▷ Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a : $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

On a donc $a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin^2(t) > 0$

Comme ln est continue, on a $\Psi_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left(\sin^2(t)\right)$

On a établi $\boxed{\text{la convergence simple de la suite d'applications } (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ vers } t \mapsto 2\ln(\sin(t))}$

L'énoncé original parle de convergence uniforme sur $]0, \pi]$, *il s'agit d'une erreur d'énoncé.*

(i) Les fonctions Ψ_n^2 $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ (argument inutile !)

(ii) La suite d'applications $\left(\Psi_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergence simplement sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $t \mapsto 4\ln^2(\sin(t))$.

(iii) La fonction $t \mapsto 4\ln^2(\sin(t))$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ (argument inutile !)

(iv) La suite (a_n) est décroissante et positive de limite nulle et alors que la suite $(b_n) = (1 - a_n)$ est croissante et positive de limite 1.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant a_n^2 \leqslant a_1^2 = \dfrac{1}{4}$ et $b_1^2 = \dfrac{1}{4} \leqslant b_n^2 \leqslant 1$.

Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\frac{1}{4}\sin^2(t) \leqslant a_n^2\cos^2(t) + b_n^2\sin^2(t) \leqslant \frac{1}{4}\cos^2(t) + \sin^2(t) \leqslant \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

D'où par croissance de ln, on a

$$2\ln(\sin(t)) - 2\ln(2) \leqslant \Psi_n(t) \leqslant \ln(1) = 0$$

Ainsi on a l'hypothèse de domination :

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right],\ \left|\Psi_n^2(t)\right| \leqslant 4\ln(2)^2 - 8\ln(2)\ln(\sin(t)) + 4\ln(\sin(t))^2$$

car $t \longmapsto 4\ln(2)^2 - 8\ln(2)\ln(\sin(t)) + 4\ln(\sin(t))^2$ est continue et intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, selon 9

Avec **(i), (ii), (iii)** et **(iv)**, le théorème de convergence dominée s'applique. Cela donne l'existence des membres et l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 4\ln^2(\sin(t))\,\mathrm{d}x = 4\mathrm{D}_2$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\forall x \in [0, \pi],\ \Psi_n(\pi - x) = \Psi_n(x)$, on a en effectuant le changement de variable :
$u = \pi - x\,;\ \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$

$$\int_0^{\pi} \Psi_n(x)^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 \mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} \Psi_n(x)^2 \mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 \mathrm{d}x$$

Ainsi avec 15, on a

$$\int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 \mathrm{d}x = 2\pi\left(\ln\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)\right)^2 + \pi\sigma\left(\rho_n^2\right) = 2\pi\ln(2)^2 + \pi\sigma\left((b_n - a_n)^2\right)$$

car $a_n + b_n = 1$ en ayant posé $\rho_n = \dfrac{b_n - a_n}{b_n + a_n} = b_n - a_n$ (on a bien $b_n > 0$ et $a_n > 0$).

Comme σ est continue sur $[-1, 1]$ et $\sigma(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$ selon la partie 3, on a $\sigma\left((b_n - a_n)^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi^2}{6}$.

D'où $4\mathrm{D}_2 = 2\pi\ln(2)^2 + \dfrac{\pi^3}{6}$.

Avec la partie 2, on en déduit $\boxed{f''(0) = \mathrm{D}_2 = \dfrac{\pi\ln(2)^2}{2} + \dfrac{\pi^3}{24}}$

5 Convexité logarithmique

17 ▷ Soit $x > -1$.

La fonction $t \mapsto (\sin(t))^x$ est continue et positive sur $]0, \pi/2]$ et non identiquement nulle car $(\sin(\pi/2))^x = 1$.

Ainsi $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x \,\mathrm{d}t > 0$.

Donc f est définie sur l'intervalle non trivial I à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $\ln \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I car f l'est, selon 5.

Ainsi $(\ln \circ f)' = \dfrac{f'}{f}$ et $(\ln \circ f)'' = \dfrac{f''f - (f')^2}{f^2}$.

Pour établir que f est ln-convexe sur I, il suffit alors de montrer que : $0 \leqslant \dfrac{f''f - (f')^2}{f^2}$

Soit $\varepsilon \in]0, \pi/2[$. Les fonctions $t \mapsto (\sin(t))^{x/2}$ et $t \mapsto \ln(\sin(t))\,(\sin(t))^{x/2}$ sont continues sur le segment $[\varepsilon, \pi/2]$.

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, pour le produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([\varepsilon, \pi/2], \mathbb{R})$, on a

$$\left(\int_\varepsilon^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,(\sin(t))^x \,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin(t))^x \,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_\varepsilon^{\pi/2} \ln(\sin(t))^2\,(\sin(t))^x \,\mathrm{d}t\right)$$

Comme les intégrales convergent sur $]0, \pi/2]$, on peut faire tendre ε vers 0 pour obtenir :

$$\left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,(\sin(t))^x \,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x \,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))^2\,(\sin(t))^x \,\mathrm{d}t\right)$$

Ainsi $(f'(x))^2 \leqslant f''(x)f(x)$

On a montré que $(\ln \circ f)'' \geqslant 0$ sur I d'où $\boxed{f \text{ est une application de I dans } \mathbb{R} \text{ ln-convexe}}$

18 ▷ Soit $x \geqslant 0$. Comme $2x + 2 > 2x + 1 > 2x \geqslant 0$, selon (1), on a

$$\widetilde{f}(x+1) = \ln(f(2x+2)) = \ln((2x+2)f(2x+2)) - \ln(2x+2) = \ln((2x+1)f(2x)) - \ln(2x+2) = \widetilde{f}(x) + \ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N},\ \widetilde{f}(x+k+1) - \widetilde{f}(x+k) = \ln\left(\dfrac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)$. Par télescopage, on a alors

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \widetilde{f}(x+p) - \widetilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{p-1}\left(\widetilde{f}(x+k+1) - \widetilde{f}(x+k)\right) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)$$

On peut conclure que $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \widetilde{f}(x+p) = \widetilde{f}(x) + \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)}$

19 ▷ Par composition $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left]\dfrac{-1}{2}, +\infty\right[$ et

$$\forall x \in \left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[,\ \left(\widetilde{f}\right)'(x) = 2\,(\ln \circ f)'(x) \text{ et } \left(\widetilde{f}\right)''(x) = 4\,(\ln \circ f)''(x) \geqslant 0$$

donc $\widetilde{f}$ est convexe sur $\left]\dfrac{-1}{2}, +\infty\right[$.

En appliquant la croissance des pentes avec $n-1 \leqslant n+x \leqslant n+p$ et n dans $\left]\dfrac{-1}{2}, +\infty\right[$, on a $\dfrac{\widetilde{f}(n) - \widetilde{f}(n-1)}{n-(n-1)} \leqslant \dfrac{\widetilde{f}(n+x) - \widetilde{f}(n)}{n+x-n} \leqslant \dfrac{\widetilde{f}(n+p) - \widetilde{f}(n)}{n+p-n}$

ce qui permet de conclure que $\boxed{\widetilde{f}(n) - \widetilde{f}(n-1) \leqslant \dfrac{\widetilde{f}(n+x) - \widetilde{f}(n)}{x} \leqslant \dfrac{\widetilde{f}(n+p) - \widetilde{f}(n)}{p}}$

D'après 18 avec $n-1 \geqslant 0$, on a $\widetilde{f}(n) - \widetilde{f}(n-1) = \ln\left(\dfrac{2(n-1)+1}{2(n-1)+2}\right) = \ln\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)$

Or $\ln\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par composition et donc $\widetilde{f}(n) - \widetilde{f}(n-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Toujours selon 18, on a par somme finie

$$\widetilde{f}(n+p) - \widetilde{f}(n) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2n+2k+1}{2n+2k+2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Or

$$x\left(\widetilde{f}(n) - \widetilde{f}(n-1)\right) \leqslant \widetilde{f}(n+x) - \widetilde{f}(n) \leqslant \frac{x}{p}\left(\widetilde{f}(n+p) - \widetilde{f}(n)\right)$$

Ainsi par produit et selon les gendarmes $\boxed{(\widetilde{f}(n+x) - \widetilde{f}(n)) \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty}$

À x fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, ce résultat dépend de l'existence $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \leqslant p$.
Choisir $p = 1 + \lfloor x \rfloor$ valide ce résultat indépendamment de p.

20 ▷ On sait déjà que f est une application de I dans $\mathbb{R}$ (Q4), ln-convexe (Q17), qui vérifie (1) (Q4) et telle que $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ (Q7).

Pour l'unicité, on considère h une application de I dans $\mathbb{R}$, ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que $h(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

On pose $\widetilde{h} : x \mapsto \ln(h(2x))$.

Comme h vérifie (1), on peut établir comme en 18 que

$$\forall p \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in \mathbf{R}_+,\ \widetilde{h}(x+p) = \widetilde{h}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right) \qquad (2)$$

Comme $\widetilde{h}(0) = \ln(\pi/2) = \widetilde{f}(0)$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \widetilde{h}(n) = \widetilde{f}(n) \quad (3)$$

Pour montrer que $\widetilde{h}$ est convexe, on considère x et $y \in]-1/2, +\infty[$ et $\lambda \in [0,1]$.

Comme $2x$ et $2y \in$ I et que $\ln \circ h$ est convexe sur I, on a

$$\widetilde{h}(\lambda x + (1-\lambda)y) = \ln \circ h(\lambda 2x + (1-\lambda)2y) \leqslant \lambda \ln \circ h(2x) + (1-\lambda) \ln \circ h(2y) = \lambda \widetilde{h}(x) + (1-\lambda)\widetilde{h}(y)$$

Ainsi $\widetilde{h}$ est convexe sur $]-1/2, +\infty[$.

Soit $x > 0$, en faisant comme en 19, on peut alors montrer que $\widetilde{h}(n+x) - \widetilde{h}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

En utilisant (3) et la question 19, on obtient :

$$\widetilde{h}(n+x) - \widetilde{f}(n+x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Puis à l'aide de (2) et la question 18, on a

$$\widetilde{h}(x) - \widetilde{f}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $\forall x > 0,\ \widetilde{h}(x) = \widetilde{f}(x)$. D'où $\forall x > 0,\ h(x) = \exp\left(\widetilde{h}(x/2)\right) = \exp\left(\widetilde{f}(x/2)\right) = f(x)$

Puis à l'aide de l'identité (1), on obtient

$$\forall x \in \mathrm{I},\ h(x) = \frac{x+2}{x+1} h(x+2) = \frac{x+2}{x+1} f(x+2) = f(x)$$

Ainsi $h = f$ ce qui donne l'unicité :

$$\boxed{f \text{ est la seule application de I dans } \mathbb{R}, \text{ qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que } f(0) = \frac{\pi}{2}}$$

21 $\triangleright$ Soit g de $]-\mathrm{T},+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, ln-convexe et vérifiant $\forall t \in]-\mathrm{T},+\infty[,\ (t+\mathrm{T})g(t) = (t+2\mathrm{T})g(t+2\mathrm{T})$

On pose $h : x \mapsto \dfrac{\pi g(\mathrm{T}x)}{2g(0)}$. Comme ci-dessus, on montre facilement que

$$h \text{ est une application de I dans } \mathbf{R}\text{, qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que } h(0) = \frac{\pi}{2}$$

Donc $h = f$ puis $g : t \mapsto \dfrac{2g(0)f(t/\mathrm{T})}{\pi}$

Réciproquement, on montre facilement que pour $k > 0$, l'application $g : t \mapsto kf(t/\mathrm{T})$ est une application de $]-\mathrm{T},+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, ln-convexes et vérifiant $\forall t \in]-\mathrm{T},+\infty[,\ (t+\mathrm{T})g(t) = (t+2\mathrm{T})g(t+2\mathrm{T})$.

On conclut pour $\mathrm{T} \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\text{les applications } g :]-\mathrm{T},+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\text{, ln-convexes et vérifiant}$$

$$\forall t \in]-\mathrm{T},+\infty[,\ (t+\mathrm{T})g(t) = (t+2\mathrm{T})g(t+2\mathrm{T})$$

$$\text{sont les applications } g\ :\ \left\{\begin{array}{rcl}]-\mathrm{T},+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & kf\left(\dfrac{t}{\mathrm{T}}\right) \end{array}\right. \quad \text{avec } k > 0.$$

22 $\triangleright$ On rappelle que $\mathrm{T} > 0$!!!!

Par l'absurde, on suppose qu'il existe une application h, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ln-convexe, vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (t+\mathrm{T})h(t) = (t+2\mathrm{T})h(t+2\mathrm{T})$$

On évalue cette égalité en $-\mathrm{T}$ pour trouver $h(\mathrm{T}) = 0$ car $\mathrm{T} \neq 0$ ce qui absurde car $\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) > 0$.

En conclusion :

$$\boxed{\text{il n'existe pas d'application } h\text{, de } \mathbf{R} \text{ dans } \mathbf{R} \text{ et ln-convexe, vérifiant } \forall t \in \mathbf{R},\ (t+\mathrm{T})h(t) = (t+2\mathrm{T})h(t+2\mathrm{T})}$$