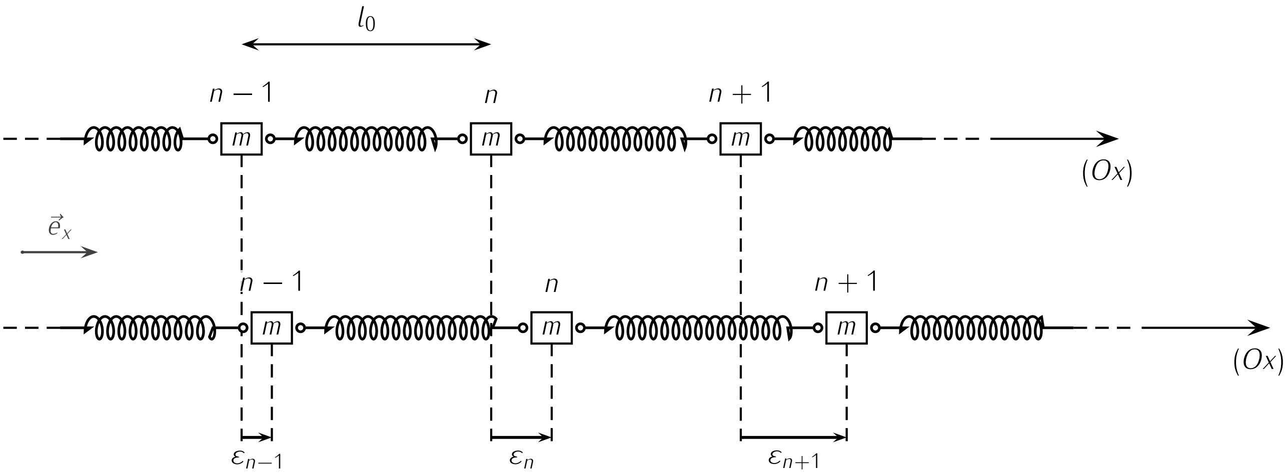
Propagation du son dans un solide

On cherche à étudier la propagation du son dans un solide. Pour cela, on modélise à l'échelle microscopique un solide par une chaîne infinie d'oscillateurs de type masse-ressort. Les points matériels représentent les atomes du solide, et les ressorts permettent de rendre compte des forces subies par ces atomes lorsqu'ils se déplacent au voisinage de leur position d'équilibre. Le poids des atomes ainsi que les forces de frottement sont **négligées**. Tous les points matériels ont la même masse, notée m. Tous les ressorts ont la même raideur k et la même longueur à vide l_0.

En l'absence de son, les ressorts ont pour longueur l_0. Tous les points matériels sont alors à l'équilibre, et sont tous espacés entre eux d'une longueur l_0. Le point matériel n est alors à l'abscisse $x_n(t) = n\, l_0$. En présence d'une onde sonore, chacun des points matériels se déplace au cours du temps sur l'axe (Ox). Le point matériel n est alors à l'abscisse $x_n(t) = nl_0 + \varepsilon_n(t)$, avec $\varepsilon_n(t) \geq 0$ ou $\varepsilon_n(t) \leq 0$. L'onde sonore est caractérisée par la donnée de $\varepsilon_n(t)$ pour toutes les valeurs de n.



Q1 1. Exprimer $\overrightarrow{T}_{\text{gauche}}$ la force exercée sur le point n par le ressort à sa gauche en fonction de ε_n, ε_{n-1} et des constantes du problème.

Q2 2. Exprimer $\overrightarrow{T}_{\text{droite}}$ la force exercée sur le point n par le ressort à sa droite en fonction de ε_n et ε_{n+1} et des constantes du problème.

Q3 3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point matériel n et montrer que l'équation du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon_n}{\mathrm{d}t^2} = \omega_0^2\left(\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n-1} - 2\varepsilon_n\right)$$

Déterminer ω_0.

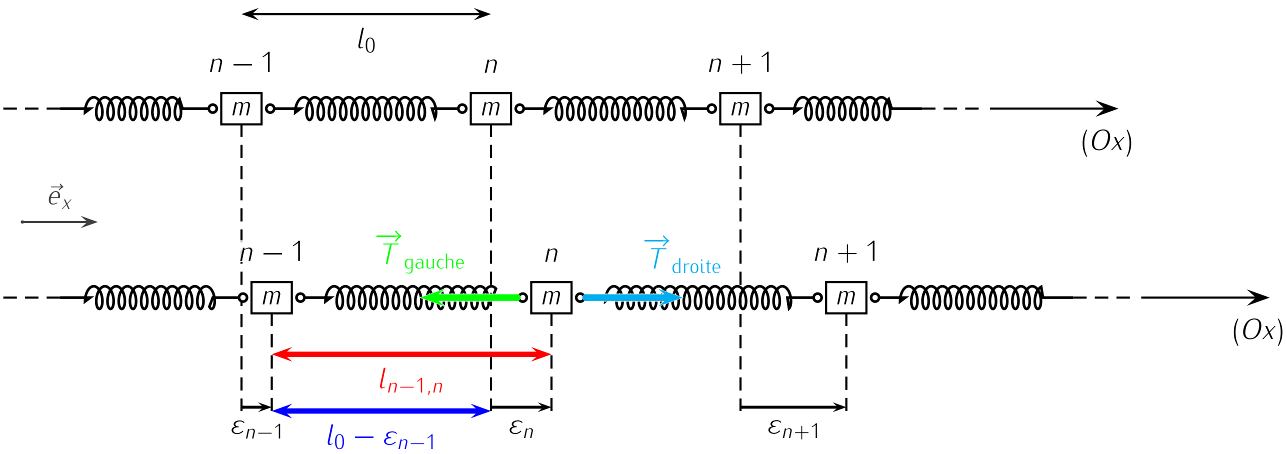
Les questions ci-dessous, plus difficiles, ne sont à aborder que si tout le reste a été traité.

Q4 4. Vérifier qu'une fonction du type $\varepsilon_n(t) = A\cos\left(\omega t - \alpha n l_0\right)$ (où A et α sont des constantes) est solution de l'équation différentielle précédente, à condition que ω, ω_0, α, et l_0 soient liés entre eux par la relation $\sqrt{2}\omega_0\sqrt{1-\cos(\alpha l_0)} = \omega$.

Q5 5. On note $\varepsilon(x,t) = A\cos(\omega t - \alpha x)$, avec $x = nl_0$ la position à l'équilibre de l'atome n. $\varepsilon(x,t)$ représente une onde sonore progressive sinusoïdale se propageant dans le sens croissant. Exprimer sa célérité c. Simplifier l'expression obtenue dans le cas où $\alpha l_0 \ll 1$. On rappelle que si $x \ll 1$ alors $\cos x \simeq 1 - \frac{1}{2}x^2$.

Q6 6. On note $\varepsilon'(x,t) = A\cos(\omega t + \alpha x)$ l'expression d'une onde sonore progressive sinusoïdale de même fréquence se propageant dans le sens décroissant. Déterminer l'expression de l'onde sonore résultant de la somme de ces deux ondes et montrer qu'il s'agit d'une onde stationnaire.

Propagation du son dans un solide



Système : {le point n de masse m}
Référentiel : terrestre, considéré comme galiléen pour cette étude
Bilan des forces appliquées : $\overrightarrow{T}_{\text{gauche}}$ et $\overrightarrow{T}_{\text{droite}}$ tels que définis par l'énoncé.
Schéma : voir plus haut. Le sens des forces pour les ressorts a été mis en faisant l'hypothèse que le ressort est étiré (permet de vérifier les signes, qui restent les mêmes si le ressort est comprimé).

Q7 1. On remarque sur le schéma que la longueur du ressort entre $n-1$ et n, ici noté $l_{n-1,n}$ est telle que $l_{n-1,n} + \varepsilon_{n-1} = l_0 + \varepsilon_n$ et donc $l_{n-1,n} = l_0 - \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$. On en déduit :
$\overrightarrow{T}_{\text{gauche}} = -k(l_{n-1,n} - l_0)\vec{e}_x = -k(l_0 - \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n - l_0)\vec{e}_x = \boxed{-k(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})\vec{e}_x}$
Autre justification possible, l'énoncé donné à l'équilibre $x_n = nl_0$, donc hors équilibre $x_n = nl_0 + \varepsilon_n$ d'où $l_{n-1,n} = x_n - x_{n-1} = nl_0 + \varepsilon_n - ((n-1)l_0 + \varepsilon_{n-1}) = l_0 + \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$.

Q8 2. De même $l_{n,n+1} = l_0 - \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}$ d'où : $\overrightarrow{T}_{\text{droite}} = -k(l_{n,n+1} - l_0)(-\vec{e}_x) = +k(l_0 - \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} - l_0)\vec{e}_x = \boxed{+k(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)\vec{e}_x}$

Q9 3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique au point matériel n : $m\vec{a} = \vec{T}_{\text{gauche}} + \vec{T}_{\text{droite}} \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon_n}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_x = -k(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})\vec{e}_x + k(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)\vec{e}_x$
Soit en projetant selon $\vec{e}_x$:
$m\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon_n}{\mathrm{d}t^2} = k(\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n+1} - 2\varepsilon_n) \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon_n}{\mathrm{d}t^2} = \frac{k}{m}(\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n+1} - 2\varepsilon_n)}$ ce qui est bien la forme suggérée par l'énoncée avec ici $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$.

Le résultat étant donné, il faut être particulièrement rigoureux sur les justifications à cette question et aux deux précédentes.

4. Soit $\varepsilon_n(t) = A\cos(\omega t - \alpha n l_0)$, alors $\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon_n}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2\cos(\omega t - \alpha n l_0)$, on a alors
$\varepsilon_{n+1}(t) = A\cos(\omega t - \alpha(n+1)l_0)$ et $\varepsilon_{n-1}(t) = A\cos(\omega t - \alpha(n-1)l_0)$
Pour que ce type de solution marche, il faut et il suffit donc que
$\forall t; -A\omega^2\cos(\omega t - \alpha n l_0) = \omega_0^2(A\cos(\omega t - \alpha(n+1)l_0) + A\cos(\omega t - \alpha(n-1)l_0) - 2A\cos(\omega t - \alpha n l_0))$
$\Leftrightarrow \forall t \quad -\omega^2\cos(\omega t - \alpha n l_0) = \omega_0^2(\cos(\omega t - \alpha(n+1)l_0) + \cos(\omega t - \alpha(n-1)l_0) - 2\cos(\omega t - \alpha n l_0))$
On utilise une formule d'addition de cosinus (pour faire apparaitre $\cos(\omega t - \alpha n l_0)$ partout et pouvoir simplifier) :
$\cos(\omega t - \alpha(n+1)l_0) + \cos(\omega t - \alpha(n-1)l_0) = 2\cos(\omega t - \alpha n l_0)\cos(\alpha l_0)$
On en déduit que la fonction ε_n de l'énoncé est solution si et seulement si :
$\forall t \quad -\omega^2\cos(\omega t - \alpha n l_0) = \omega_0^2(2\cos(\omega t - \alpha n l_0)\cos(\alpha l_0) - 2\cos(\omega t - \alpha n l_0))$
on met tout dans le même membre et on factorise par le cosinus

$\Leftrightarrow \forall t \qquad 0 = (2\omega_0^2\cos(\alpha l_0) - 2\omega_0^2 + \omega^2)\cos(\omega t - \alpha n l_0)$

Q10 comme cela doit être vrai pour tout t et que le cosinus n'est pas nul pour tout t, alors c'est que $\boxed{2\omega_0^2\cos(\alpha l_0) - 2\omega_0^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\omega_0\sqrt{1-\cos(\alpha l_0)} = \omega}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction proposée par l'énoncé soit solution de l'équation.

Q11 5. α est ici le vecteur d'onde, or on sait d'après le cours que $\omega = \alpha c$ d'où $\boxed{c = \omega/\alpha}$

Q12 6. L'onde totale résultante est donc $\varepsilon_{tot} = \varepsilon + \varepsilon' = A(\cos(\omega t - \alpha x) + \cos(\omega t + \alpha x)) = \boxed{2A\cos(\omega t)\cos(\alpha x)}$. L'onde est de la forme $g(t) \times f(x)$ et correspond donc à une onde stationnaire.