6.4 Ondes électromagnétiques milieux-Exercice 2

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma peu dense :
$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$ et $\underline{\vec{B}} = \vec{B}_0 \exp i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$. On suppose la densité volumique $\underline{\rho}$ de charge non nulle.

a-Etablir l'équation du mouvement d'un électron en faisant les approximations nécessaires.
On note n_e la densité particulaire d'électrons. Montrer que l'on peut définir une conductivité complexe $\underline{\gamma}$.

b-A l'aide des équations de Maxwell et de l'équation locale de conservation de la charge, établir une nouvelle expression de $\underline{\gamma}$ en fonction de ω et ε_0.

c-Montrer que $\underline{\vec{B}} = \vec{0}$. En déduire la position relative des vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{E}$ et commenter.
Montrer que la pulsation ω ne peut avoir qu'une seule valeur.

---

a-<u>Loi de la quantité de mouvement</u> à un électron : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v}\wedge\vec{B} + \vec{F}_{\text{autres particules}\to\text{électron}}$

Plasma peu dense : $\vec{F}_{\text{autres particules}\to\text{électron}}$ négligeable

Electron non relativiste : force magnétique négligeable

Il reste : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$

En régime sinusoïdal et notation complexe $i\omega m\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}$ d'où : $\underline{\vec{v}} = -\dfrac{e\underline{\vec{E}}}{i\omega m}$

Puis $\underline{\vec{j}} = -n_e e\underline{\vec{v}} = \dfrac{n_e e^2}{i\omega m}\underline{\vec{E}}$ d'où : $\boxed{\underline{\gamma} = \dfrac{n_e e^2}{i\omega m}}$

b-<u>Equation de conservation de la charge</u> : $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\,\vec{j} = 0$ => $i\omega\underline{\rho} + \underline{\gamma}\,\text{div}\underline{\vec{E}} = 0$ => $i\omega\underline{\rho} + \underline{\gamma}\dfrac{\underline{\rho}}{\varepsilon_0} = 0$

D'où : $\boxed{\underline{\gamma} = -i\omega\varepsilon_0}$

c-<u>Equation de Maxwell-Ampère</u> : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t})$ => $-i\vec{k}\wedge\vec{B} = \mu_0(\underline{\gamma}\underline{\vec{E}} + \varepsilon_0 i\omega\underline{\vec{E}})$

Or $\underline{\gamma} = -i\omega\varepsilon_0$ donc : $-i\vec{k}\wedge\vec{B} = \vec{0}$ On en déduit que $\vec{k}$ et $\vec{B}$ sont parallèles

Or $\text{div}\vec{B} = 0$ donc $-i\vec{k}.\vec{B} = 0$ On en déduit que $\vec{k}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires

La seule possibilité est donc d'avoir $\boxed{\vec{B} = \vec{0}}$

<u>Equation de Maxwell-Faraday</u> : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ donc : $-i\vec{k}\wedge\vec{E} = \vec{0}$ donc : $\boxed{\vec{k} \text{ et } \vec{E} \text{ sont parallèles}}$

L'onde est <u>longitudinale</u>.

On identifie les deux expressions de la conductivité complexe : $\underline{\gamma} = \dfrac{n_e e^2}{i\omega m} = -i\omega\varepsilon_0$

D'où l'unique pulsation possible : $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{n_e e^2}{m\varepsilon_0}} = \omega_P}$
