**6.4 Ondes électromagnétiques milieux-Exercice 6**

---

Un satellite S se trouve au-dessus de l'ionosphère d'épaisseur H, à la verticale d'un point P de la Terre. On note D la distance SP. On assimile la partie de l'atmosphère autre que l'ionosphère à du vide. On note $f_P$ la fréquence plasma et on rappelle la relation de dispersion d'un plasma : $k^2 = (\omega^2 - \omega_P^2)/c^2$.

a-Le satellite émet simultanément à t = 0 deux paquets d'ondes étroits, centrés autour de deux fréquences $f_1$ et $f_2$ telles que $f_1 > f_2 >> f_P$. Ils arrivent en P aux dates $t_1$ et $t_2$ respectivement. Exprimer en fonction de H, c, $f_1$, $f_2$ et $f_P$ le décalage temporel $\Delta t = t_2 - t_1$ entre la réception des deux signaux en P.

b-Etablir l'expression du temps t mis par un paquet d'ondes de fréquence f $>> f_P$ pour parvenir du satellite au point P en fonction de de D, H, c, f et $f_P$.

c-En déduire, à l'aide des résultats précédents, que D = ct – d en exprimant d en fonction de $\Delta t$, c, f, $f_1$ et $f_2$.

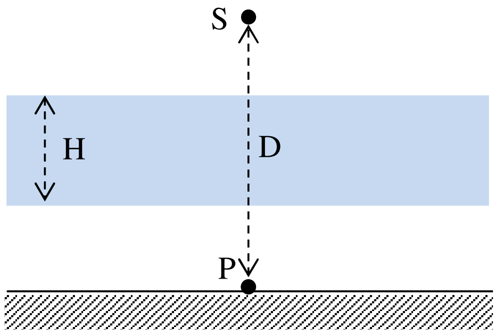
d-Le terme d est appelé correction ionosphérique, il est obtenu par mesure de $\Delta t$ en temps réel et il est de l'ordre du cm. Commenter cette valeur pour différentes applications du G.P.S.

---

a-Relation de dispersion : $\omega^2 = k^2c^2 + \omega_P^2$

On dérive par rapport à k : $2\omega\dfrac{d\omega}{dk} = 2kc^2$ => $\dfrac{d\omega}{dk} = \dfrac{kc^2}{\omega}$

Vitesse de groupe : $v_g = c\sqrt{1-\dfrac{\omega_P^2}{\omega^2}} = c\sqrt{1-\dfrac{f_P^2}{f^2}}$




Chaque paquet d'ondes parcourt la distance D-H dans l'air à la vitesse c et la distance H dans l'ionosphère à la vitesse $v_g$.

$t_1 = \dfrac{D-H}{c} + \dfrac{H}{v_g(f_1)}$ et $t_2 = \dfrac{D-H}{c} + \dfrac{H}{v_g(f_2)}$

Donc : $\Delta t = H[\dfrac{1}{v_g(f_2)} - \dfrac{1}{v_g(f_1)}] = \dfrac{H}{c}[(1-\dfrac{f_P^2}{f_2^2})^{-1/2} - (1-\dfrac{f_P^2}{f_1^2})^{-1/2}]$ or : $f_1 > f_2 >> f_P$

$$\Delta t \approx \frac{H}{c}[(1+\frac{f_P^2}{2f_2^2}) - (1+\frac{f_P^2}{2f_1^2})]$$

Finalement : $\boxed{\Delta t \approx \dfrac{Hf_P^2}{2c}[\dfrac{1}{f_2^2} - \dfrac{1}{f_1^2})]}$

b-On a : $t = \dfrac{D-H}{c} + \dfrac{H}{v_g(f)} = \dfrac{D-H}{c} + \dfrac{H}{c}(1-\dfrac{f_P^2}{f^2})^{-1/2} \approx \dfrac{D-H}{c} + \dfrac{H}{c}(1+\dfrac{f_P^2}{2f^2})$

Donc : $\boxed{t \approx \dfrac{D}{c} + \dfrac{Hf_P^2}{2cf^2}}$

c-D'où : $D \approx ct - \dfrac{Hf_P^2}{2f^2}$ On en déduit : $d = \dfrac{Hf_P^2}{2f^2}$

D'après la question a : $\dfrac{Hf_P^2}{2} = c\Delta t\dfrac{f_1^2f_2^2}{f_1^2 - f_2^2}$

Donc : $\boxed{d = c\Delta t\dfrac{f_1^2f_2^2}{f^2(f_1^2 - f_2^2)}}$

d-Correction non nécessaire pour la localisation d'une automobile, par exemple.
Correction nécessaire pour une étude scientifique précise, sismologie par exemple.

---