

Attention :

- Justifiez tous vos résultats, commentez les applications numériques si cela vous semble pertinent.
- Tout résultat non justifié sera systématiquement considéré comme faux.
- Soignez la présentation : faites de belles figures, encadrez les résultats, aérez votre copie.
- Les résultats non homogènes seront sanctionnés.

COMMENT ACCORDER UNE GUITARE**A. Recherche des solutions en ondes stationnaires**

- Q1 1. (a) k est appelé vecteur d'onde. La dimension de l'argument du sinus est 1 (et son unité est le radian) donc $[kx] = 1$ or $[x] = L$ d'où $[k] = L^{-1}$. Avec le même raisonnement pour l'unité, on a $[k] = \text{rad.m}^{-1}$ (ou tout autre unité d'angle divisé par une unité de longueur).
- (b) Si λ est la période spatiale de l'onde, on doit avoir $\forall x \setminus y(x, t) = y(x + \lambda, t)$ soit $\sin(kx + \varphi_1) = \sin[k(x + \lambda) + \varphi_1]$ d'où $k\lambda = 2\pi \times n$ avec n un entier. Le $\forall x$ permet d'exclure l'autre condition d'égalité de deux sinus : $kx + k\lambda + \varphi_1 = \pi - kx - \varphi_1$ ne peut pas être vérifiée quelque soit x . On en déduit $k\lambda = 2\pi$ (car λ est le plus petit réel positif permettant de vérifier cette relation)

Q2 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Comme cela été dit en cours, ne partez pas des relations $k = \frac{\omega}{c}$ ou $\lambda = c/f$ qui ne sont valables que dans des milieux non dispersifs non absorbant. La relation $k = 2\pi/\lambda$ est plus générale.

- Q3 (c) La corde est fixe en ses deux extrémités donc $y(0) = y(L) = 0$ pour tout t . L'élongation est donc $[nulle]$.

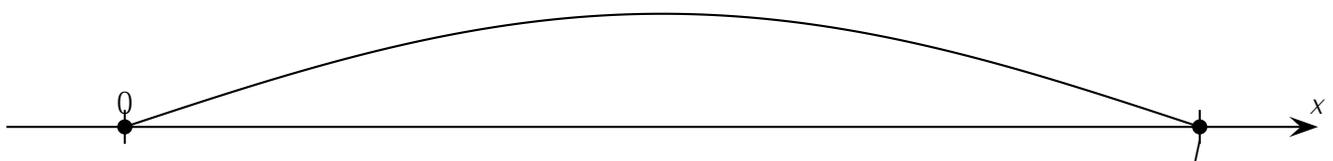
Ne dites pas « il n'y a pas d'élongation », ce qui est ambigu : cela voudrait dire que l'élongation n'est pas définie ? (c'est par exemple le cas en dehors de la corde, cela n'a pas de sens de parler de l'élongation)

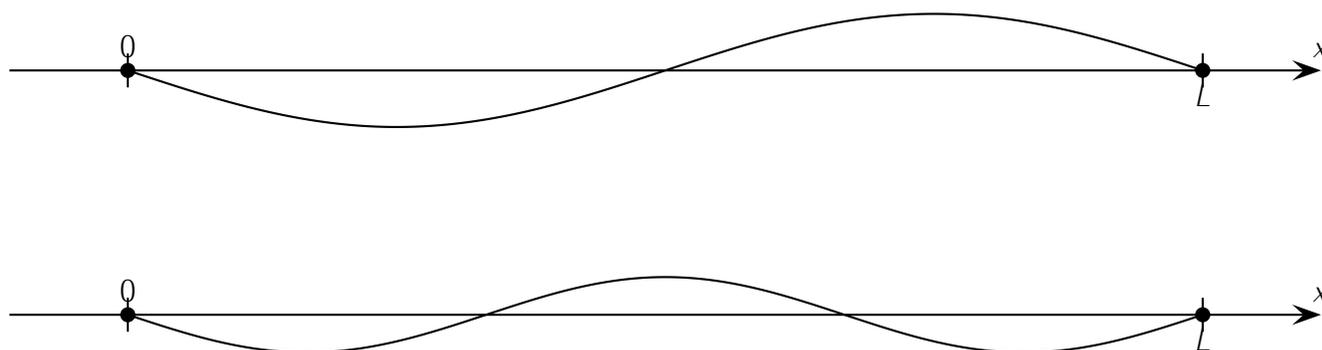
- Q4 (d) La première condition impose $\sin(\varphi_1) = 0$ d'où $\varphi_1 = 0$. La deuxième condition donne $\sin(kL) = 0$ d'où $kL = n\pi$ avec n entier non nul (car ni k ni L ne sont nuls). D'où $[k_n = \frac{n\pi}{L}]$.

Q5 (e) $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$ $[L = \frac{n\lambda_n}{2}]$

- Q6 (f) T la période spatiale satisfait $\omega T = 2\pi$ d'où $f_n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{kc}{2\pi}$ avec $\omega = kc$ d'où $[f_n = \frac{nc}{2L}]$.

- Q7 2. $y_n(x, t) = \sin(\frac{n\pi x}{L}) \sin(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi_2)$. L'allure de la corde pour le fondamental et les deux premiers harmoniques est représentée ci-dessous :





Q8

3. Pour mesurer les fréquences propres d'une corde, on peut utiliser un vibreur de fréquence variable fixé à une extrémité de la corde de longueur L . L'autre extrémité passe par une poulie et on attache un poids au bout de la corde pour fixer la tension par exemple.

On fait varier la fréquence du vibreur pour observer les différents modes : des faisceaux avec des nœuds et des ventres de grande amplitude. Les fréquences correspondantes sont les fréquences propres de la corde. Pour les autres fréquences, $\sin(kL) \neq 0$ et c'est donc y_0 qui vaut 0.

On peut éventuellement utiliser un stroboscope pour mesurer les fréquences à laquelle on excite la corde si la fréquences d'excitation n'est pas connue. Mais l'utilisation d'un stroboscope seule ne suffit pas à connaître les modes propres de la corde, mais simplement la fréquence à laquelle le vibreur fonctionne. De plus, lorsque l'on voit une corde immobile, on ne sait pas si on est à la fréquence d'oscillation de la corde f ou à un sous multiple f/n avec n un entier. Cela demande donc des précautions.

Une autre solution serait d'exciter la corde en tapant dessus pour exciter tout les modes propres, puis de regarder la/les fréquences d'oscillations à l'aide d'un stroboscope (ou d'un micro). Puisque seuls les modes propres peuvent se propager, alors on pourra les déterminer. Un problème est que l'on excite différent modes propres de différentes fréquences : on ne verra pas facilement les harmoniques mais seulement le fondamental. De plus, les modes propres excités dépendent de la manière de frapper la corde.

B. Application à une corde de guitare

Q9

1. Pour le mode fondamental, nous avons $L = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f_1}$. D'où $f_1 = \frac{c}{2L}$
2. On note f' la nouvelle fréquence associée à L' la nouvelle longueur de corde (f et L étant les anciennes).

Définissez rapidement les notations que vous introduisez.

Q10

Pour monter la note d'un demi-ton : $f' = f \times 2^{1/12}$. Or la note est liée à la fréquence du fondamental, on peut donc utiliser le résultat de la question précédente : $f = \frac{c}{2L}$ et $f' = \frac{c}{2L'}$. On en déduit :
 $f' = f \times 2^{1/12} \Rightarrow \frac{c}{2L'} = \frac{c}{2L} \times 2^{1/12}$.

Soit $L' = L \times 2^{-1/12}$

Il faut donc multiplier la longueur de la corde par $2^{-1/12}$ (soit raccourcir la corde).

Ne vous contentez pas de dire qu'il faut raccourcir la corde : ce n'est pas suffisant. On veut savoir de combien (et cela nous servira pour la question d'après).

3. En notant L_n la longueur de la corde lorsque l'on pince la n^{e} frette. On monte d'un demi-ton à chaque fois d'où $L_n = L_{n-1} \times 2^{-1/12}$. D'où par récurrence $L_p = L_0 \times (2^{-1/12})^p$ en notant L_0 la longueur totale (utile) de la corde lorsque l'on utilise pas les frettes.

$$\text{On souhaite } L_p \geq \frac{L}{4} \Leftrightarrow L \times 2^{-p/12} \geq \frac{L}{4} \Leftrightarrow \ln(2^{-p/12}) \geq \ln \frac{1}{4}$$

$$\frac{-p}{12} \ln 2 \geq \ln \frac{1}{4} \Leftrightarrow p \leq \frac{-\ln 1/4}{\ln 2} \times 12 = 24$$

Q11 Il y a 24 frettes au maximum.

Rem : avec 24 frettes, on couvre une étendue de 2 octaves avec une corde (octave : intervalle séparant deux sons dont la fréquence fondamentale du plus aigu est le double de celle du plus grave). $f_{24} = f \times (2^{1/12})^{24} = 4f$

On pouvait vérifier l'ordre de grandeur du résultat en comptant le nombre de frette sur la photo (même si sur la photo, la condition est plutôt $L_p \geq \frac{L}{3}$, le résultat reste similaire). Ainsi, si vous trouvez 3 frettes ou 100 frettes, vous savez que votre résultat est « suspect ».

Q12 4. (a) Voir TP. On trouve $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

(b) $T = \mu c^2 = \mu(\lambda f_1)^2 = \mu(2L f_1)^2$ car $L = \lambda/2$.

Q13 A.N. : $T = 0,55 \cdot 10^{-3} \times (2 \times 63 \cdot 10^{-2} \times 330)^2$ $T = 95 \text{ N}$

Il y a trop d'erreur sur ce type de question (carré oublié, $\times 2$ oublié, gramme utilisé au lieu de kg). Les applications numériques sont faciles et peuvent rapporter gros, il faut toutefois les faire avec soin.

C. Étude spectrale d'un son

- Q14 1. (a) Le signal n'est pas « purement sinusoïdal » (il présente des irrégularités). Il est constitué d'un fondamental et d'une série d'harmoniques d'amplitudes variables. La corde, jouée par le guitariste, ne vibre pas dans un mode unique mais dans une superposition de différents modes. Puisque la corde a été frappée très près du chevalet, le mode de plus grande amplitude n'est sans doute pas le fondamental.

(b) *Attention, il est demandé le mode de plus grande amplitude, pas le fondamental ou la période du signal (ce qui revient au fondamental).*

Le signal étant malgré tout presque sinusoïdal (ou en tout cas sur certains intervals, il apparaît un harmonique prépondérant : entre $t = 8 \text{ ms}$ et $t = 18 \text{ ms}$, on compte approximativement 4 périodes, soit $T \simeq 2,5 \text{ ms}$, ce qui donne $f \simeq 400 \text{ Hz}$).

Q15

Comptez plusieurs périodes, expliquez où vous les avez prises. Prenez les dans une zone où le signal a l'air sinusoïdal.

Q16 2. (a) C'est la transformée de Fourier qui permet d'obtenir le spectre d'un signal temporel.

(b) On compte 9 harmoniques dans le spectre, celui le plus important n'est pas ici le fondamental mais le 5^e harmonique de fréquence légèrement inférieure à 400 Hz, ce qui est en accord avec la question précédente.

Q17

Ces harmoniques sont régulièrement espacés ($f_n = n f_1$). $f_5 \simeq 400 \text{ Hz}$ conduit à $f_1 = 400/5 \simeq 80 \text{ Hz}$, ce qui est bien en accord avec la donnée de l'énoncé pour la corde mi_1 .

- Q18 (c) Pour pouvoir jouer d'autres notes (cad changer la hauteur ou la fréquence de la note), comme vu plus haut, le guitariste appuie sur une frette pour changer la longueur vibratoire de la corde. En effet, la note est reliée à la fréquence fondamentale $f = \frac{c}{2L}$, ainsi la corde étant plus courte lorsque l'on pince une frette, la nouvelle note sera forcément plus aigüe.

La question est une question de physique et non de musique : justifier votre réponse à l'aide des résultats obtenus.

- Q19 3. (a) On observe un phénomène de battements. A l'oreille, il se manifeste par une variation (ou modulation) dans le temps de l'amplitude du son entendu avec une période T_{batt} . Alternativement, les deux signaux issus de deux cordes vont être en phase (maximum local du signal total) puis en opposition de phase (minimum local du signal total).

- Q20 (b) **Lecture de fréquences des deux principaux pics** sur le spectre : ils se situent à $f_1 \simeq 430$ Hz et $f_2 \simeq 435$ Hz (incertitude de l'ordre de 1 Hz). Cet écart doit donner des battements comme sur le signal enregistré.

Lecture sur le signal : la mesure de la période des battements donne $T_{batt} \simeq 240$ ms d'où une fréquence $f_{batt} \simeq 4,2$ Hz. Or d'après le cours, $f_{batt} = f_2 - f_1$. Cet écart est bien compatible avec les deux fréquences relevées sur le spectre.

Amplitude relatives : Sur les spectres, l'amplitude de la composante à f_1 est deux fois plus grande que celle à f_2 . C'est en accord avec le signal où l'on a grossièrement $S_{max} \simeq 2$ V et $S_{min} \simeq 0,75$ V (difficile à lire à cause du bruit). On peut en déduire que les amplitudes des deux signaux sont de l'ordre de 1,4 V et 0,7 V, soit à peu près un facteur 2. Cela est cohérent avec le spectre où il y a à peu près un facteur 2 entre les amplitudes. On ne peut pas facilement comparer les valeurs exactes avec le spectres car les amplitudes obtenues sont peu précises (dû à l'élargissement des pics compte tenu de la fenêtre finie d'acquisition).

Enfin, l'existence des harmoniques introduit quelques déformations dans le signal. Cela donne un signal un peu déformé par rapport à celui vu en théorie pour deux signaux purs.

Remarque : il est impossible sur ce signal de mesurer la pseudo-fréquence en comptant les oscillations. De plus, il serait faux de dire que la pseudo-fréquence est la moyenne des fréquences puisque les amplitudes ne sont pas égales.

- (c) Pour accorder les cordes, il faut tourner les clés pour changer la tension. Le but est d'obtenir la même fréquence, ainsi lorsque l'on tourne une clé, on peut savoir si on l'a tournée dans le bon sens en écoutant les battements : si la période des battements augmentent, alors c'est que la différence de fréquence diminue, on tourne dans le bon sens. Au contraire, si la période des battements diminue, c'est que les fréquences "s'éloignent" et on tourne dans le mauvais sens.

Lorsque l'on n'entend plus les battements parce que la période est devenue trop grande, c'est-à-dire lorsque l'on entend un son d'amplitude constante qui n'est plus modulée dans le temps, alors c'est que la différence de fréquence est nulle.

- Q21 Remarque : les deux cordes ne seront pas accordées de manière absolue... mais juste accordées entre elles! Cela permet déjà de rendre le son de la guitare harmonieux.

Ne dites pas juste que l'on fait disparaître les battements, en effet si on désaccorde beaucoup les deux cordes, les battements disparaîtront car la condition nécessaire pour les battements (2 fréquences proches) ne sera plus vérifiée. Il faut expliquer dans quel sens tourner les clés.

TROUS D'YOUNG

A. Description qualitative du problème

- Q22 1. En se référant uniquement aux lois de l'optique géométrique, la figure observée sur l'écran serait simplement deux petites tâches rouges en face des trous. Il ne peut donc pas y avoir d'interférence puisqu'il n'y a pas superposition d'onde.

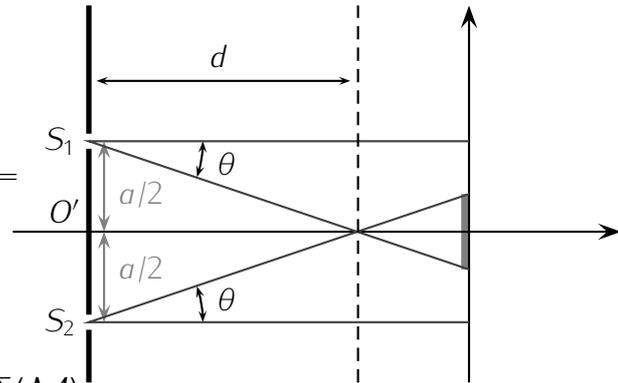
De plus, l'optique géométrique ne permet pas de prévoir l'existence d'un champ d'interférences de façon générale car elle postule l'indépendance des rayons lumineux.

- Q23 2. Lorsqu'on obture l'un des trous, on observe la diffraction par ce trou. Le faisceau s'élargit avec un angle θ défini comme sur le schéma et relié à la taille du trou e et à la longueur d'onde λ par :

$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{e}$$

A.N. $\theta = \arcsin\left(\frac{633 \cdot 10^{-9}}{0,070 \cdot 10^{-3}}\right) = 9,0 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,52^\circ$.

- Q24 3. La distance minimale d à laquelle il faut placer l'écran pour observer le phénomène d'interférences est celle à partir de laquelle les rayons issus des deux trous se superposent. Elle est définie par : $\tan(\theta) = \frac{a}{2d} \simeq \theta$ A.N. $d \simeq 22 \text{ mm}$. Pour un écran à 1,5 m, on pourra bien observer des interférences.



B. Expression de $S_2M - S_1M = \delta(M)$

Soit un point M de l'écran (E) de coordonnées $(x, 0, 0)$ dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

- Q25 1. Coordonnées des trous S_1 et S_2 : $S_1(a/2; 0; -D)$ et $S_2(-a/2; 0; -D)$
D'où les distances S_1M et S_2M :

$$S_1M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2} \quad \text{et} \quad S_2M = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2}$$

Faites un schéma et appliquez le théorème de Pythagore si nécessaire : la question ne présentait pas de difficulté.

- Q26 2. On en déduit : $S_2M^2 - S_1M^2 = 2ax$. (Il fallait simplifier !)

- Q27 3. Factorisons la différence des carrés : $S_2M^2 - S_1M^2 = (S_2M - S_1M)(S_2M + S_1M)$.

Les hypothèses nous permettent d'écrire $S_1M \simeq S_2M \simeq D$, donc on peut faire l'approximation :

$$S_2M + S_1M \simeq 2D. \text{ D'où : } S_2M^2 - S_1M^2 = (S_2M - S_1M)2D = 2\delta D$$

avec $\delta(M) = S_2M - S_1M$, la différence de chemin optique.

La méthode rigoureuse pour cette démonstration consiste à faire un développement limité.

- Q28 4. En utilisant les deux réponses précédentes, on peut écrire :

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

C. Intensité lumineuse de l'onde résultante

Q29 1. $\Delta t = \frac{S_1 M}{c}$ d'où $\varphi = -\frac{2\pi S_1 M}{\lambda}$. Attention au signe moins lié au fait que l'on traite un retard et non une avance.

Q30 2. $s_{1M}(t) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\left(t - \frac{S_1 M}{c}\right)\right)$ Peut se retrouver en utilisant $\cos(\omega t - kr)$.
 $s_{2M}(t) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\left(t - \frac{S_2 M}{c}\right)\right)$

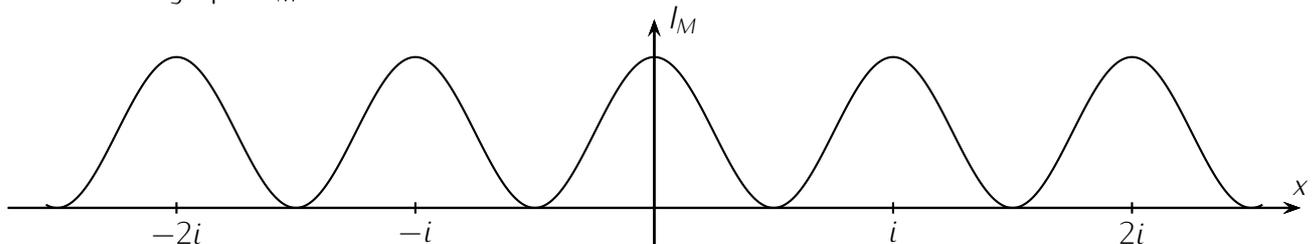
Q31 3. $s_M(t) = s_{1M}(t) + s_{2M}(t) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\left(t - \frac{S_1 M}{c}\right)\right) + s_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\left(t - \frac{S_2 M}{c}\right)\right)$
 En utilisant : $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ on obtient :

$$s_M(t) = 2s_0 \cos\left(\frac{\pi c}{\lambda}\left(2t - \frac{S_1 M}{c} - \frac{S_2 M}{c}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi}{\lambda}(S_1 M - S_2 M)\right)$$

Q32 4. $I_M = K \langle s_M^2(t) \rangle = 2K s_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}(S_1 M - S_2 M)\right) = 2K s_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}(\delta)\right) = 2K s_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda D}\right)$
 (Le facteur est 2 car $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$, mais ce n'est pas un point important et les réponses avec $4K s_0^2$ ou K simplement sont comptés justes.)

Q33 5. L'interfrange i de la figure d'interférences est la période spatiale de la figure d'interférences. Or la fonction \cos^2 est périodique de période π donc $i = \frac{\lambda D}{a}$.

Q34 6. L'allure du graphe I_M en fonction de x est :



L'ordre d'interférence est défini par $p = \frac{\delta}{\lambda}$, donc la position de la frange d'ordre 0 correspond à $\delta = 0$ soit $x = 0$. C'est la frange centrale.

LANCER DE BALLE

Q35 1. On étudie la balle assimilée à un point matériel dans le référentiel local galiléen. Elle est soumise à son poids et à l'action du support. Le poids est une force conservative et l'action du support ne travaille pas, ainsi l'évolution est conservative. D'après le théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = E_c(\text{final}) - E_c(\text{initial}) = W_{A \rightarrow A}(\vec{P}) = 0$$

donc $V = v_A$.

Q36 2. On applique à nouveau le théorème de l'énergie cinétique, entre A et C.

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -2mgR$$

, soit $v_C = \sqrt{v_A^2 - 4mgR}$.

Q37 3. (a) Encore une fois, on applique le théorème de l'énergie cinétique entre A et un point M repéré par l'angle θ .

$$\Delta E_c = -mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m v_M^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

. Soit, $v_M^2 = v_A^2 - 2gR(1 - \cos \theta)$.

- Q38 (b) Cette fois-ci, on applique la seconde loi de Newton lorsque la balle est dans la partie circulaire.

$$\vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$$

. Soit, en projection sur \vec{e}_r :

$$-R_N + mg \cos \theta = -m \frac{v_M^2}{R}$$

. Ainsi :

$$R_N = m \left(3g \cos \theta - 2g + \frac{v_A^2}{R} \right)$$

- Q39 (c) Si la balle arrivait en C avec une vitesse nulle, on aurait $v_A = 2\sqrt{gR}$ et donc $R_N = mg(2 + 3 \cos(\theta))$. Au point C , $\theta = \pi$ e donc $R_N = -mg$! Ce n'est pas possible, R_N ne peut pas être négative. Il existe donc un angle θ pour lequel R_N s'annule et la bille qui le rail.

- Q40 (d) La vitesse minimale en A pour atteindre le point C est celle qui annule R_N en C et pas avant. Soit :

$$R_N(\pi) = m \left(-3g + 2g + \frac{v_{A,min}^2}{R} \right) = 0$$

ce qui donne $v_{A,min} = \sqrt{5gR}$.

- Q41 4. (a) À partir du point C et jusqu'à l'atterrissage en A on aura, avec une origine du repère en B :

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 2R$$

$$x(t) = -v_C t$$

Il s'agit d'une simple chute libre, on peut se permettre d'aller rapidement et de donner directement la réponse.

- Q42 (b) On exprime t en fonction de x et on substitue dans y pour trouver

$$y(x) = -\frac{g}{2v_C^2}x^2 + 2R$$

(c)

$$v_x = -v_C$$

- Q43 et $v_y = -gt$

- Q44 (d) On a $\tan \beta = \frac{v_y}{-v_C} = \frac{gt}{v_C}$.

- Q45 (e) L'énergie mécanique de la balle se conserve, et comme l'énergie potentielle en A est la même lorsque Philippe lance la balle que lorsqu'elle retombe, alors $E_C(A, \text{début}) = E_C(A, \text{fin})$ soit $v_A^2 = v_x(T_3)^2 + v_y(T_3)^2$.

- Q46 5. (a) La balle possède un mouvement rectiligne uniforme entre A et B donc $x(t) = v_A t$, la bille arrive en B à la date T_1 telle que $x(T_1) = d$, soit

$$T_1 = \frac{d}{6\sqrt{gR}}$$

- Q47 (b) La balle atteint le point C avec une vitesse v_C vérifiant $\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -2mgR$ donc $v_C = 4\sqrt{2}\sqrt{gR}$. À partir du point C et jusqu'à l'atterrissage $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 2R$, la balle touche donc le sol à l'instant T_3 tel que $y(T_3) = 0$ soit $T_3 = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$.

(c) L'équation horaire en $x(t)$ permet de trouver d :

$$x(T_3) = -d = -v_C T_3$$

donc

$$d = 8\sqrt{2}R$$

Q48

(d) On peut donc trouver une nouvelle expression pour T_1 :

$$T_1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Q49

On trouve donc $T_3 > T_1$, ce résultat est prévisible car la balle parcourt la même distance en x dans les deux cas, mais avec $v_C < v_A$.

6. La (douloureuse) seconde phase BC

Q50

(a) Pour changer... on applique le théorème de l'énergie cinétique entre A et un point M sur le guide circulaire.

$$\frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mg(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m36gR$$

soit

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(17 + \cos \theta)$$

Q51

(b) On sépare les variables :

$$\frac{d\theta}{\sqrt{17 + \cos \theta}} = \sqrt{\frac{2g}{R}} dt$$

On cherche le temps T_2 pour aller de B en C , θ doit donc varier entre 0 et π . On intègre terme à terme :

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{17 + \cos \theta}} = \sqrt{\frac{2g}{R}} T_2$$

$$, \text{ ainsi } T_2 = 0,54\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Q52

(c) Finalement $T = T_1 + T_2 + T_3 = \sqrt{\frac{R}{g}} \left(\frac{4}{3}\sqrt{2} + 0,54 + 2 \right) = 4,42\sqrt{\frac{R}{g}}$.

Q53

(d) L'application numérique donne $T = 1,40s$. L'écart normalisé avec la mesure donne

$$EN = \frac{|T - T_{mes}|}{u(T)} = \frac{0,1}{0,07} = 1,4 < 3$$

on peut considérer que la modélisation est conforme à l'expérience.