

---

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

*Cours de révision et compléments*

---

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

## I. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

### A. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

#### Définition 1

- ▶ On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* toute équation différentielle de la forme :

$$(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux fonctions **continues** sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Une *solution de (E) sur I* est une fonction  $f$  dérivable sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , qui vérifie pour tout  $t \in I$ ,  $f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$ .

- ▶ On appelle *équation homogène associée à (E)* l'équation différentielle :

$$(H) \quad y' + a(t)y = 0.$$

- ▶ Si  $f$  est solution de (E) sur  $I$  alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .
- ▶ On note  $\mathcal{S}_{E,I}$  l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur  $I$  et  $\mathcal{S}_{H,I}$  l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur  $I$ .
- ▶ Lorsque l'équation différentielle est sous la forme  $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ , on se place sur des intervalles  $I$  où la fonction  $a$  ne s'annule pas et on divise par  $a(t)$  pour se ramener à la forme ci-dessus.

#### Proposition 2 (Principe de superposition des solutions)

Si  $y_1$  est une solution de l'équation différentielle  $y' + a(t)y = b_1(t)$  sur  $I$  et  $y_2$  une solution de l'équation différentielle  $y' + a(t)y = b_2(t)$  sur  $I$  alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda y_1 + y_2$  est une solution de l'équation différentielle  $y' + a(t)y = \lambda b_1(t) + b_2(t)$  sur  $I$ .

#### Proposition 3

$\mathcal{S}_{H,I}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ .

## B. RÉSOLUTION

### Théorème 4

Si  $\mathcal{S}_{H,I}$  est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à  $(E)$  sur  $I$  et  $y_p$  est une solution particulière de  $(E)$  sur  $I$  alors l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $I$  est :

$$\mathcal{S}_{E,I} = \{y_p + y, y \in \mathcal{S}_{H,I}\}.$$

### 1. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION HOMOGENÈNE ASSOCIÉE À $(E)$

### Théorème 5

Soit  $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$  (qui existe car  $a$  est supposée continue sur  $I$ ). L'ensemble des solutions de l'équation homogène  $y' + a(t)y = 0$  sur  $I$  est :

$$\mathcal{S}_{H,I} = \{t \mapsto \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}(f)$$

en notant  $f$  la fonction définie sur  $I$  par :  $\forall t \in I, f(t) = e^{-A(t)}$ .

$\mathcal{S}_{H,I}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1.

### 2. RECHERCHE D'UNE SOLUTION PARTICULIÈRE DE $(E)$

*Méthode de variation de la constante :*

- ▶ Soit  $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$ .

On cherche une solution particulière de l'équation  $(E)$   $y' + a(t)y = b(t)$  sous la forme :

$$\forall t \in I, f(t) = \lambda(t)e^{-A(t)} \text{ où } \lambda \text{ est une fonction dérivable sur } I.$$

- ▶  $f$  est solution de  $(E)$  sur  $I$  si et seulement si  $\forall t \in I, \lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$ .
- ▶ Il suffit donc de prendre pour  $\lambda$  une primitive de  $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$  sur  $I$  (qui existe puisque cette fonction est continue sur  $I$ ).

Une fois  $t \mapsto \lambda(t)$  déterminée, attention de ne pas oublier de multiplier par  $t \mapsto e^{-A(t)}$  pour obtenir une solution particulière de  $(E)$ .

Par conséquent, en notant  $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$  et  $t_0$  un élément de  $I$ , on a :

$$\mathcal{S}_{E,I} = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto \lambda e^{-A(t)} + \left( \int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)} ds \right) e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{K} \end{array} \right\}.$$

## C. PROBLÈME DE CAUCHY

### Définition 6

On appelle *problème de Cauchy linéaire du premier ordre* la donnée d'une équation différentielle linéaire du premier ordre et d'une condition initiale  $y(t_0) = y_0$  où  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ .

### Théorème 7

Soit  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ . On suppose que  $a$  et  $b$  sont continues sur  $I$ .

Le problème de Cauchy  $\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$  admet une unique solution définie sur  $I$  c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction  $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$  telle que  $\forall t \in I, f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$  et  $f(t_0) = y_0$ .

*Exemple 1* : Résoudre l'équation différentielle  $\operatorname{ch}(t)y' + \operatorname{sh}(t)y = \frac{1}{\sqrt{1-2t^2}}$  sur  $\left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$ .

*Exemple 2* : Complément sur les systèmes différentiels du premier ordre à coefficients constants

Résoudre les systèmes différentiels suivants sur  $\mathbb{R}$  :

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x'_1 = x_2 + x_3 \\ x'_2 = x_1 + x_3 \\ x'_3 = x_1 + x_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} x'_1 = & x_2 \\ x'_2 = (3 - 4i)x_1 + (2 + 4i)x_2. \end{cases}$$

## II. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

### A. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

#### Définition 8

- On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants* toute équation différentielle de la forme :

$$(E) \quad y'' + ay' + by = c(t)$$

où  $(a, b) \in \mathbb{K}$  et  $c$  est une fonction **continue** sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Une *solution de (E) sur I* est une fonction  $f$  deux fois dérivable sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , qui vérifie pour tout  $t \in I$ ,  $f''(t) + af'(t) + bf(t) = c(t)$ .

- On appelle *équation homogène associée à (E)* l'équation différentielle :

$$(H) \quad y'' + ay' + by = 0.$$

Si  $f$  est une solution de (E) sur  $I$  alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ .

#### Proposition 9 (Principe de superposition des solutions)

Si  $y_1$  est une solution de l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = c_1(t)$  sur  $I$  et  $y_2$  une solution de l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = c_2(t)$  sur  $I$  alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda y_1 + y_2$  est une solution de l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = \lambda c_1(t) + c_2(t)$  sur  $I$ .

#### Proposition 10

$\mathcal{S}_{H,I}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

### B. PROBLÈME DE CAUCHY

#### Définition 11

On appelle *problème de Cauchy linéaire du second ordre à coefficients constants* la donnée d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et des conditions initiales  $y(t_0) = y_0$  et  $y'(t_0) = x_0$  où  $(t_0, y_0, x_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ .

#### Théorème 12

Soit  $(t_0, y_0, x_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ . On suppose que  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  et  $c$  est continue sur  $I$ .

Le problème de Cauchy 
$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = x_0 \end{cases}$$
 admet une unique solution définie sur  $I$

c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction  $f$  deux fois dérivable sur  $I$  telle que :  
 $\forall t \in I, f''(t) + af'(t) + bf(t) = c(t), f(t_0) = y_0$  et  $f'(t_0) = x_0$ .

## C. RÉOLUTION

### Théorème 13

Si  $\mathcal{S}_{H,I}$  est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à  $(E)$  sur  $I$  et  $y_p$  est une solution particulière de  $(E)$  sur  $I$  alors l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $I$  est :

$$\mathcal{S}_{E,I} = \{y_p + y, y \in \mathcal{S}_{H,I}\}.$$

### 1. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION HOMOGENÈNE ASSOCIÉE À $(E)$

On considère l'équation homogène  $(H)$   $y'' + ay' + by = 0$  avec  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ .

On appelle *équation caractéristique associée à  $(H)$*  l'équation  $r^2 + ar + b = 0$  où  $r \in \mathbb{K}$ .

On la note  $(e_c)$  et on note  $\Delta$  le discriminant du trinôme du second degré  $r \mapsto r^2 + ar + b$ .

### Théorème 14

►  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  :

i) Si  $\Delta \neq 0$  alors  $(e_c)$  possède deux racines complexes distinctes  $r_1$  et  $r_2$ .

On a alors :

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}} = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

ii) Si  $\Delta = 0$  alors  $(e_c)$  possède une racine complexe double  $r_0$ .

On a alors :

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}} = \{t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{r_0 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

►  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  :

i) Si  $\Delta > 0$  alors  $(e_c)$  possède deux racines réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ .

On a alors :

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}} = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

ii) Si  $\Delta = 0$  alors  $(e_c)$  possède une racine réelle double  $r_0$ .

On a alors :

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}} = \{t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{r_0 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

iii) Si  $\Delta < 0$  alors  $(e_c)$  possède deux racines complexes conjuguées distinctes

$r_1 = \alpha + i\beta$  et  $r_2 = \alpha - i\beta$ .

On a alors :

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}} = \{t \mapsto e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

On obtient dans chaque cas une base de  $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$ , qui est de dimension 2.

## 2. RECHERCHE D'UNE SOLUTION PARTICULIÈRE DE (E)

On considère l'équation (E)  $y'' + ay' + by = c(t)$  avec  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ .

Suivant la fonction  $c$ , on pourra chercher une solution particulière de (E) sous une certaine forme.

- ▶ On suppose que  $c(t) = P(t)e^{mt}$  où  $P$  est un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{K}$ .  
On cherche une solution particulière sous la forme :
  - (i)  $y_p(t) = Q(t)e^{mt}$  si  $m$  n'est pas une racine de  $(e_c)$
  - (ii)  $y_p(t) = tQ(t)e^{mt}$  si  $m$  est une racine simple de  $(e_c)$  , où  $Q$  est un polynôme de degré  $n$ .
  - (iii)  $y_p(t) = t^2Q(t)e^{mt}$  si  $m$  est une racine double de  $(e_c)$
  
- ▶ On suppose que  $c(t) = \alpha \operatorname{ch}(mt)$  ou  $c(t) = \alpha \operatorname{sh}(mt)$  avec  $(\alpha, m) \in \mathbb{K} \times \mathbb{R}$ .  
On cherche une solution particulière pour le second membre  $c_1(t) = e^{mt}$  puis pour le second membre  $c_2(t) = e^{-mt}$  et on applique le principe de superposition.
  
- ▶ On suppose que  $c(t) = \alpha \cos(mt)$  ou  $c(t) = \alpha \sin(mt)$  avec  $(\alpha, m) \in \mathbb{K} \times \mathbb{R}$ .  
On cherche une solution particulière pour le second membre  $c_1(t) = e^{imt}$  puis pour le second membre  $c_2(t) = e^{-imt}$  et on applique le principe de superposition.  
Si  $a, b$  et  $\alpha$  sont des réels alors on peut aussi chercher une solution particulière  $Y_p$  pour le second membre  $c(t) = \alpha e^{imt}$ ,  $\operatorname{Re}(Y_p)$  est alors une solution pour le second membre  $\alpha \cos(mt)$  et  $\operatorname{Im}(Y_p)$  pour le second membre  $\alpha \sin(mt)$ .

*Exemple 3* : Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

$$(E_1) y'' + y = e^{-t} + \cos(t) \quad \text{et} \quad (E_2) y'' + 4y' + y = e^{-t} \sin(t).$$

Pour finir, on rappelle qu'il est possible de chercher pour toute équation différentielle des solutions développables en série entière.