

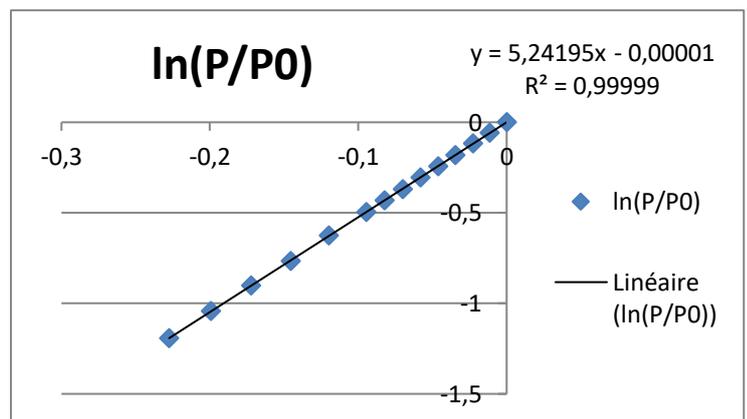
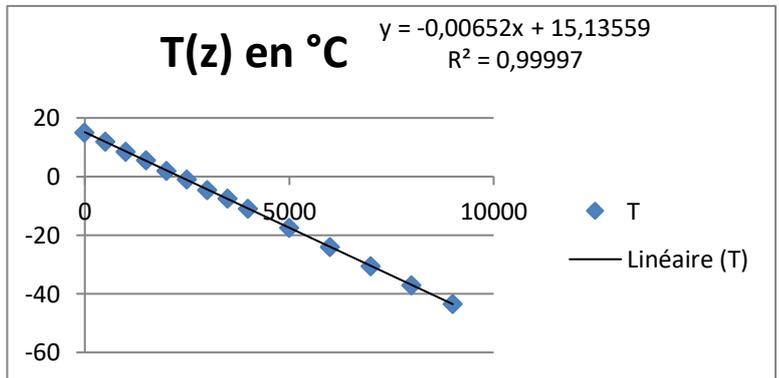
PARTIE 1 : Etude de l'atmosphère et de certains instruments de vol

Question 1-1 :

- a) L'équation locale de la statique des fluides est la relation fondamentale de la statique des fluides qui, compte tenu de la seule force volumique présente ici (celle de pesanteur), s'écrit : $\vec{\text{grad}}P = \rho \vec{g}$.
- b) Avec le modèle du gaz parfait, $\rho = \frac{PM}{RT_0}$.
- c) En projection sur l'axe vertical ascendant, la relation fondamentale donne $\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{PM}{RT_0} g$. On intègre en séparant les variables : $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$, en posant $H = \frac{RT_0}{Mg}$.
- d) La masse volumique ρ s'en déduit : $\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$, avec $\rho_0 = \frac{P_0 M}{RT_0}$.
- e) Application numérique : $\rho_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\rho(13\text{km}) = 0,26 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- f) Pour les faibles altitudes, c'est-à-dire $z \ll H$, on peut linéariser la fonction $P(z) : P(z) \approx P_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right)$. Le coefficient directeur de la droite est $a = -\frac{P_0}{H} = -\frac{P_0 M g}{RT_0} = -12 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1} = -0,036 \text{ hPa} \cdot \text{ft}^{-1}$. Pour un gain en altitude de 28 ft, on perd donc $0,036 \times 28 = 1,0 \text{ hPa}$, ce qui est bien cohérent.

Question 1-2 :

- a) $\frac{dT}{dz} = -\frac{0,65}{100} = -T_0 \alpha$ d'où $\alpha = 0,65 / (288 \cdot 100) = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$. (ou $\alpha = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ si T_0 en degrés).
- b) La régression linéaire ci-contre montre que le modèle affine est **très bien vérifié**. Le coefficient directeur de $-6,52 \cdot 10^{-3}$ trouvé par la régression est bien en accord avec celui du modèle.
- c) pour calculer numériquement (dP/dz) en z_n à l'aide du tableau, on peut calculer $\frac{P(z_{n+1}) - P(z_{n-1}))}{z_{n+1} - z_{n-1}}$
Autour de $z = 1000 \text{ m}$, $\frac{845 - 955}{1500 - 500} = -\frac{110}{1000} = -0,11 \text{ hPa/m}$ On retrouve bien le résultat de la question 1-1f.
- d) On peut tracer $y = \ln(P(z) / P_0)$ en fonction de $x = \ln(1 - \beta z)$. Le second graphe ci-contre montre qu'on obtient une droite passant par l'origine donc $y = \delta x$. $\delta = 5,24$ sans dimension.



PARTIE 2 : Poussée d'un réacteur et différentes phases de vol

Question 2-1 :

- a) La résultante des forces de pression étant nulle puisque c'est la même pression P_0 qui s'exerce tout autour du réacteur, le théorème de la résultante dynamique s'écrit, pour le réacteur, dans le référentiel lié à celui-ci, supposé galiléen : $-\vec{F}_0 + m_r \vec{g} = \vec{0}$, m_r étant la masse du réacteur. Il vient $\vec{F}_0 = m_r \vec{g}$. On a utilisé ici le principe des actions réciproques : \vec{F}_0 est la force exercée par le réacteur sur l'aile, et $-\vec{F}_0$ la force exercée par l'aile sur le réacteur.
- b) Lors du fonctionnement, il y a un écoulement donc on peut faire un bilan de quantité de mouvement en prenant un système fermé Σ^* composé à l'instant t de :
 - Σ_0 (les parties solides du réacteur et tout le gaz qui se trouve à l'intérieur) ;
 - $\delta \Sigma_{11}$ (la masse $\delta m_e = D_{me} dt$ d'air qui va entrer avec une vitesse \vec{v}_e) ;
 - $\delta \Sigma_{12}$ (la masse δm_c de carburant qui rentre de façon radiale).
 Le même système Σ^* est composé à l'instant $t + dt$ de :

- Σ_0 (les parties solides du réacteur et tout le gaz qui se trouve à l'intérieur) ;
- $\delta\Sigma_2$ (la masse $\delta m_s = D_{ms}dt$ de gaz brûlés qui sont sortis avec une vitesse \vec{v}_s) ;

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à Σ^* dans le référentiel lié au réacteur, supposé galiléen donne : $\frac{\vec{p}^*(t+dt) - \vec{p}^*(t)}{dt} = m_r \vec{g} - \vec{F}_0 - \vec{F}_1 = -\vec{F}_1$, si la pression est toujours P_0 , uniforme autour du système choisi.

Or, on a $\vec{p}^*(t) = \vec{p}_{\Sigma_0}(t) + D_{me} dt \vec{v}_e$, puisque les quantités de mouvement des différentes portions de carburant se compensent deux à deux.

Et $\vec{p}^*(t + dt) = \vec{p}_{\Sigma_0}(t + dt) + D_{ms} dt \vec{v}_s$.

Puisque l'on est en régime stationnaire, $\vec{p}_{\Sigma_0}(t + dt) = \vec{p}_{\Sigma_0}(t)$, d'où finalement : $\vec{F}_1 = D_{me} \vec{v}_e - D_{ms} \vec{v}_s$.

Question 2-2 :

- a) Le premier graphe de l'annexe 2 montre que C_z est une fonction croissante de α , comme le rappelle l'énoncé. Donc lorsque α augmente, C_z augmente. D'autre part, le second graphe montre que C_z est une fonction croissante de C_x . Si on intervertissait les deux axes, on aurait pour C_x une fonction croissante de C_z . Donc quand C_z augmente, C_x augmente aussi. Finalement, quand α augmente, C_x augmente.

En conclusion, C_x est une fonction croissante de α .

On peut retrouver ceci mathématiquement : $\frac{dC_z}{d\alpha} > 0$ et $\frac{dC_z}{dC_x} > 0$, donc $\frac{dC_x}{d\alpha} > 0$ puis : $\frac{dC_x}{d\alpha} = \frac{dC_x}{dC_z} \times \frac{dC_z}{d\alpha} > 0$.

- b) Pour $\alpha = 5^\circ$, $C_z = 0,60$ et en reportant sur l'autre courbe, $C_x = 0,032$.

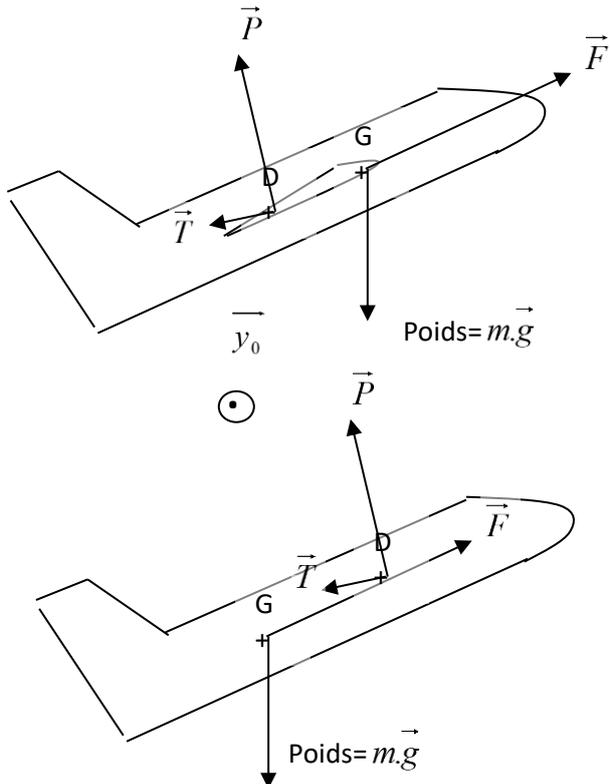
Question 2-3 :

- a) Remarque préliminaire : avec les seules forces prises en compte dans cette question, dans la situation initiale la somme des moments semble non nulle. Mais en réalité, il y a aussi l'action du PHR, non représentée ici, qui permet de rendre la somme des moments nulle.

Dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, l'avion est initialement soumis à un ensemble de forces (poids, portance \vec{P} , traînée \vec{T} et poussée \vec{F}) dont la résultante est nulle.

Lorsque la perturbation induit une variation $\Delta\alpha$ de l'angle d'incidence α , cela provoque une variation de portance $\Delta\vec{P}$ et de traînée $\Delta\vec{T}$.

Si $\Delta\alpha > 0$, $\Delta\vec{P}$ et $\Delta\vec{T}$ sont de même sens que \vec{P} et \vec{T} . Si $\Delta\alpha < 0$, $\Delta\vec{P}$ et $\Delta\vec{T}$ sont de sens opposé à \vec{P} et \vec{T} .



Cas 1 : G devant D

Si l'avion cabre, les variations de portance $\Delta\vec{P}$ et de traînée $\Delta\vec{T}$ tendent à le faire piquer ; s'il pique, ces variations tendent à le faire cabrer.

⇒ Equilibre stable

Cas 2 : G derrière D

Si l'avion cabre, les variations de portance $\Delta\vec{P}$ et de traînée $\Delta\vec{T}$ tendent à le faire cabrer davantage ; s'il pique, ces variations tendent à le faire piquer davantage.

⇒ Equilibre instable

- b) Cf a)
 c) Pour satisfaire Lindbergh, il fallait **placer G en arrière de D**.

- d) Le fait de placer le carburant dans les ailes, c'est-à-dire pas trop loin du centre de portance, permet d'éviter que le centre de gravité ne se déplace trop à mesure que les réservoirs se vident. Le comportement en stabilité de l'avion ne se modifie alors quasiment pas au cours du vol. Et, évidemment, il faut assurer en permanence la même quantité de carburant dans les deux ailes.

ETUDE DU DECOLLAGE

Question 2-4 :

- a) Par lecture graphique, on a numériquement $C_z = 7,4C_x + 0,43$.
 b) De même, $C_z = 0,10\alpha + 0,85$. Formellement, $C_z = a_1\alpha + b_1$.
 c) En éliminant C_z entre les deux équations : $7,4C_x + 0,43 = 0,10\alpha + 0,85$, d'où $C_x = 0,014\alpha + 0,057$.
 Formellement, $C_x = a_2\alpha + b_2$

Question 2-5 :

- a) Dans les conditions normales de température et de pression, la masse volumique de l'air est $\rho = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$.
 b) Le théorème de la résultante dynamique appliquée à l'avion dans son référentiel, supposé galiléen puisqu'il vole à vitesse constante, s'écrit : $F\vec{x}_b + mg\vec{z}_0 - \frac{1}{2}\rho v^2 Ll C_x(\alpha_1)\vec{x}_a - \frac{1}{2}\rho v^2 Ll C_z(\alpha_1)\vec{z}_a = \vec{0}$.

c) Selon \vec{z}_b : $mg \cos(\alpha_1 + \gamma_1) - \frac{1}{2}\rho v^2 Ll C_x(\alpha_1) \sin(\alpha_1) - \frac{1}{2}\rho v^2 Ll C_z(\alpha_1) \cos(\alpha_1) = 0$ (Eq A).

Selon \vec{x}_b : $F - mg \sin(\alpha_1 + \gamma_1) - \frac{1}{2}\rho v^2 Ll C_x(\alpha_1) \cos(\alpha_1) + \frac{1}{2}\rho v^2 Ll C_z(\alpha_1) \sin(\alpha_1) = 0$ (Eq B)

La première équation permet de trouver α_1 puis la seconde donne F .

- d) Avant d'effectuer des développements limités, il convient de convertir les angles en radians.

On pose donc $C_z = a'_1\alpha_{rad} + b_1$ et $C_x = a'_2\alpha_{rad} + b_2$, avec $a'_1 = \frac{180}{\pi}a_1$ et $a'_2 = \frac{180}{\pi}a_2$.

La première équation (Eq A) peut encore s'écrire :

$$mg \cos(\alpha_{1rad} + \gamma_{1rad}) - \frac{1}{2}\rho v^2 Ll \times (a'_2\alpha_{1rad} + b_2) \times \sin(\alpha_{1rad}) - \frac{1}{2}\rho v^2 Ll \times (a'_1\alpha_{1rad} + b_1) \times \cos(\alpha_{1rad}) = 0 \quad (\text{Eq A})$$

En se limitant à l'ordre 1 par rapport aux angles, elle devient :

$$mg - \frac{1}{2}\rho v^2 Ll b_2\alpha_{1rad} - \frac{1}{2}\rho v^2 Ll \times (a'_1\alpha_{1rad} + b_1) = 0 \quad (\text{Eq A}')$$

On en déduit $\alpha_{1rad} = \frac{2mg}{\rho v^2 Ll(a'_1 + b_2)} - \frac{b_1}{a'_1 + b_2}$, et numériquement $\alpha_{1rad} = 0,046 \text{ rad}$ et $\alpha_1 = 2,6^\circ$.

Le modèle est un peu limité pour que l'on puisse travailler à l'ordre 1, surtout pour γ_1 .

La seconde équation (Eq B) peut aussi s'écrire :

$$F = mg \times (\alpha_{1rad} + \gamma_{1rad}) + \frac{1}{2}\rho v^2 Ll \times (a'_2\alpha_{1rad} + b_2) - \frac{1}{2}\rho v^2 Ll b_1\alpha_{1rad} \quad (\text{Eq B}')$$

Numériquement, cela donne $F = 0,97 \text{ MN}$.

Question 2-6 :

- a) Voir ci-contre.

```
import matplotlib.pyplot as plt

# Création des deux listes Cx et Cz
n = len(L2)
x = [L1[i][1] for i in range(n)]
y = [L2[i][1] for i in range(n)] #20% des points

plt.figure('graphe 2')
plt.plot(x, y, 'k') # 30% des points
plt.xlabel('Cx')
plt.ylabel('Cz')
plt.show() # 20% des points
# 30% des points sur l'aspect cosmétique
# (nom de la figure, nom des axes, trait noir...)
```

- b) Erreur d'énoncé : normalement, on aurait dû mettre à disposition une fonction f3 de alpha, donnant le Cx en fonction de l'angle d'incidence. Comme ce n'était pas le cas dans l'énoncé tel qu'il était, on pouvait en fabriquer une par dichotomie

```
def dichotomie(g, a, b, epsilon):
    ''' Donne une estimation à epsilon près du zéro de g
    entrées : g, callable, fonction dont on cherche le zero
              a, float, borne inférieure de l'intervalle de recherche
              b, float, borne supérieure de l'intervalle de recherche
              eps, float, précision sur la recherche du zéro
    sortie : m, float, estimation du zéro. '''
    while b-a > epsilon :
        m = (a+b)/2
        if g(m)*g(a) < 0 : # le zéro est entre a et m
            b = m
        else :
            a = m
        m = (a+b)/2
    return m
```

```
def f3(alpha):
    Cz = f2(alpha)
    def g(Cx):
        return f1(Cx) - Cz
    a = 0
    b = 0.3
    epsilon = 1e-5
    return dichotomie(g, a, b, epsilon)

from math import cos, sin
def g(alpha) :
    res = A*cos(alpha + gamma1) + B*f3(alpha)*sin(alpha) + C*f2(alpha)*cos(alpha)
    return res
```

c)

```
from math import pi

def dico(g, epsilon):
    ''' Donne une estimation à epsilon près du zéro de g
    entrées : g, callable, fonction dont on cherche le zero
              eps, float, précision sur la recherche du zéro
    sortie : m, float, estimation du zéro. '''
    a = 0
    b = pi/2
    while b-a > epsilon :
        m = (a+b)/2
        if g(m)*g(a) < 0 : # le zéro est entre a et m
            b = m
        else :
            a = m
        m = (a+b)/2
    return m

# 30% des points si présence de la boucle while avec le bon test
# 40% des points pour les bons tests.
# 20% des points pour le reste.
# 10% sur la présence de documentation, ou de commentaires pertinents
```

PARTIE 3 : Système de commande asservie du PHR

Question 3-1 : Liaison équivalente

Entre les solides 1 et 4, on a 3 liaisons pivot en série, il est plus rapide d'utiliser une approche cinématique. Les 3 axes des liaisons pivot sont concourants au point O_4 et comme la forme du torseur cinématique pour une liaison pivot se conserve en tout point de l'axe on peut écrire :

$$\{V_{4/1}\} = \{V_{4/3}\} + \{V_{3/2}\} + \{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \bar{z}_4 \\ \dot{\beta} \bar{x}_4 \\ \dot{\gamma} \bar{y}_4 \end{Bmatrix}_{O_4} = \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \bar{x}_4 + \dot{\gamma} \bar{y}_4 + \dot{\alpha} \bar{z}_4 \\ \dot{\beta} \bar{x}_4 \\ \dot{\gamma} \bar{y}_4 \end{Bmatrix}_{O_4}$$

On obtient une liaison sphérique de centre O_4

Question 3-2 : Fonction de transfert du moteur

a) Déterminer la fonction de transfert $\mathbf{M}(p) = \frac{\Theta_m(p)}{U(p)}$ du moteur électrique et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme : $\mathbf{M}(p) = \frac{\mathbf{K}_m}{p(1 + \tau_m p)}$

Transformées de Laplace des équations caractéristiques, en supposant les conditions initiales nulles :

$$\begin{cases} U(p) = R \cdot I(p) + E(p) \\ E(p) = k_e \cdot \Omega_m(p) \\ J_e p \Omega_m(p) = k_a I(p) \\ \theta_m(p) = \frac{1}{p} \Omega_m(p) \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \Omega_m(p) = \frac{1}{k_e} \left(U(p) - R \frac{J_e p}{k_a} \Omega_m(p) \right) \\ \Omega_m(p) \left(k_e + \frac{R J_e}{k_a} p \right) = U(p) \end{cases}$$

Donc $\frac{\theta_m(p)}{U(p)} = \frac{1}{p} \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{1}{k_e} \frac{1}{p \left(1 + \frac{R J_e}{k_e k_a} p \right)} = \frac{\mathbf{K}_m}{p(1 + \tau_m p)}$ $\frac{\theta_m(p)}{U(p)} = \frac{\mathbf{K}_m}{p(1 + \tau_m p)}$

b) Donner les expressions littérales de K_m et τ_m , ainsi que les valeurs numériques

D'où : $\mathbf{K}_m = \frac{1}{k_e}$, $\tau_m = \frac{R J_e}{k_e k_a}$

A.N : $\mathbf{K}_m = \frac{1}{0,02} = 50 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ et $\tau_m = \frac{1 \times 4.10^{-6}}{(0,02)^2} = 0,01 \text{ s}$

Question 3-3 : Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p) = \frac{U_r(p)}{\varepsilon(p)}$ et en déduire

l'expression du gain de boucle K_{BO} .

La fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$T(p) = \frac{U_r(p)}{\varepsilon(p)} = \mathbf{K}_1 \frac{\mathbf{K}_m}{p(1 + \tau_m p)} \mathbf{R}_2 \mathbf{K}_2 = \frac{\mathbf{K}_{BO}}{p(1 + \tau_m p)} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_{BO} = \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_m \mathbf{R}_2 \mathbf{K}_2$$

Question 3-4 : Fonction de transfert en boucle fermée

a) Donner les expressions des transmittances G_1 et G_2 .

A partir des 2 schémas blocs :

$$U(p) = \mathbf{K}_1 (U_e(p) - \mathbf{K}_2 \mathbf{R}_2 \theta_m(p)) = \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 \mathbf{R}_2 \left(\frac{1}{\mathbf{K}_2 \mathbf{R}_2} U_e(p) - \theta_m(p) \right) \quad U(p) = \mathbf{G}_2 (\mathbf{G}_1 U_e(p) - \theta_m(p))$$

On en déduit : $\mathbf{G}_1 = \frac{1}{\mathbf{K}_2 \mathbf{R}_2}$ et $\mathbf{G}_2 = \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 \mathbf{R}_2$

b) En déduire la fonction de transfert en boucle fermée $\mathbf{F}(p) = \frac{\Theta_{P1}(p)}{U_e(p)}$ et montrer qu'elle peut se mettre sous la

forme d'un système du second ordre : $\mathbf{F}(p) = \frac{\mathbf{K}_{BF}}{1 + 2 \frac{\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$

$$F(p) = \frac{G_1 R_1 G_2 M(p)}{1 + G_2 M(p)} = \frac{G_1 R_1 G_2 \frac{K_m}{p(1 + \tau_m p)}}{1 + G_2 \frac{K_m}{p(1 + \tau_m p)}} = \frac{G_1 R_1 G_2 K_m}{p(1 + \tau_m p) + G_2 K_m}$$

$$F(p) = \frac{G_1 R_1}{1 + \frac{1}{G_2 K_m} p + \frac{\tau_m}{G_2 K_m} p^2} = \frac{G_1 R_1}{1 + \frac{1}{K_{BO}} p + \frac{\tau_m}{K_{BO}} p^2}$$

F(p) est bien de la forme $\frac{K_{BF}}{1 + 2 \frac{\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$

c) Donner l'expression littérale de K_{BF} et celles de ξ et ω_0 en fonction de K_{BO} et τ_m .

On en déduit : $K_{BF} = R_1 G_1 = \frac{R_1}{K_2 R_2}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{BO}}{\tau_m}}$, $\xi = \frac{1}{2} \frac{1}{K_{BO}} \sqrt{\frac{K_{BO}}{\tau_m}} = \frac{1}{2\sqrt{K_{BO} \tau_m}}$

Question 3-5 : Analyse des performances

a) Déterminer la valeur du gain de boucle K_{BO} de telle sorte que la réponse à une entrée de type échelon soit la plus rapide possible sans toutefois produire de dépassement.

Pour que la réponse à une entrée de type échelon soit la plus rapide possible sans toutefois produire de dépassement, il faut que le coefficient d'amortissement soit égale à 1 (régime critique).

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{K_{BO} \tau_m}} = 1 \Rightarrow K_{BO} = \frac{1}{4\tau_m} = \frac{1}{4 \times 0,01} = 25$$

b) Quel est alors l'écart de position $\varepsilon(t)$?

La fonction de transfert en boucle ouverte du schéma bloc modifié est :

$$FTBO(p) = G_2 M(p) = K_1 K_2 R_2 \frac{K_m}{p(1 + \tau_m p)}$$

La FTBO est de classe 1. Pour une entrée échelon l'écart de position sera nul.

c) Déterminer le temps de réponse à 5%.

Sur la figure, on lit le temps de réponse réduit pour $\xi = 1$: $T_r \cdot \omega_0 \approx 5$

$$T_r = \frac{5}{\omega_0} = 5 \sqrt{\frac{\tau_m}{K_{BO}}} = 5 \sqrt{\frac{0,01}{25}} = 0,1s$$

Question 3-6 : Déterminer littéralement et numériquement R_3 et R_4 .

Pour le train épicycloïdal, 1 et 2 sont des planétaires, PS est le porte satellite.

On peut donc écrire :

$$\frac{\omega_{P1/PS}}{\omega_{P2/PS}} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad \frac{\omega_{P1/0} - \omega_{PS/P0}}{\omega_{P2/0} - \omega_{PS/0}} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad \frac{\omega_{P1} - \omega_{PS}}{\omega_{P2} - \omega_{PS}} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad \frac{\theta_{P1} - \theta_{PS}}{\theta_{P2} - \theta_{PS}} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

Pour la phase 1, on a $\omega_{P2}=0$ et $\theta_{PS1} = R_3 \theta_{P1}$

On en déduit : $\frac{\omega_{P1} - \omega_{PS1}}{-\omega_{PS1}} = -\frac{Z_2}{Z_1}$ $\frac{\omega_{P1} - \omega_{PS1}}{\omega_{PS1}} = \frac{Z_2}{Z_1}$ $\frac{\omega_{P1}}{\omega_{PS1}} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}$

$\frac{\theta_{P1}}{\theta_{PS1}} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1}$ $R_3 = \frac{\theta_{PS1}}{\theta_{P1}} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$ Application numérique $R_3 = \frac{52}{52 + 20} = 0.72$

Pour la phase 2, on a $\omega_{P1}=0$ et $\theta_{PS2} = R_4 \theta_{P2}$

On en déduit : $\frac{\omega_{PS2}}{\omega_{P2} - \omega_{PS2}} = \frac{Z_2}{Z_1}$ $\frac{\omega_{P2} - \omega_{PS2}}{\omega_{PS2}} = \frac{Z_1}{Z_2}$ $\frac{\omega_{P2}}{\omega_{PS2}} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}$

$$\frac{\theta_{P2}}{\theta_{PS2}} = \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2}$$

$$R_4 = \frac{\theta_{PS2}}{\theta_{P2}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$\text{Application numérique } R_4 = \frac{20}{52 + 20} = 0.27$$

Question 3-7 :

- a) On reconnaît deux fois la structure d'un montage classique vu en cours (structure commune à l'ampli. inverseur, à l'intégrateur et au dérivateur). La fonction de transfert en régime harmonique est donc :

$$\underline{C}_1(j\omega) = \left(-\frac{r_2}{r + \frac{1}{jC\omega}} \right) \times \left(-\frac{r_4 + \frac{1}{jC_4\omega}}{r_3} \right) = \frac{r_2 C \cdot 1 + j r_4 C_4 \omega}{r_3 C_4 \cdot 1 + j r C \omega}$$

$$\text{d'où en notation opérationnelle : } C_1(p) = \frac{r_2 C \cdot 1 + r_4 C_4 p}{r_3 C_4 \cdot 1 + r C p}$$

$$\text{On pose } \boxed{K_1 = \frac{r_2 C}{r_3 C_4}}, \boxed{T_1 = r_4 C_4}, \text{ et } b T_1 = r C, \text{ d'où } \boxed{b = \frac{r C}{r_4 C_4}}.$$

- b) Oui, ici on peut multiplier les fonctions de transfert des deux montages en cascade car le premier a une impédance de sortie nulle (ou quasiment), du fait que sa sortie est celle de l'ALI. La fonction de transfert du premier étage n'est donc pas modifiée par la présence du second : le premier étage se comporte à sa sortie comme une source de tension idéale, dont la tension délivrée ne dépend pas de ce qui est branché à ses bornes. De manière générale, on peut multiplier les fonctions de transfert en tension d'étages cascades quand l'impédance de sortie d'un étage est nulle ou celle d'entrée du suivant infinie, ou bien les deux.
- c) Il faut respecter le critère de Shannon : il faut $\boxed{f_e \geq 2f_{max}}$, où f_{max} est la plus grande fréquence présente dans le signal d'entrée du filtre.

Un filtre anti-repliement est un filtre passe-bas placé juste avant le convertisseur analogique-numérique ; il permet d'éviter que le signal d'entrée du convertisseur ne contienne des fréquences supérieures à $f_e/2$ et ainsi d'éviter que le critère de Shannon ne soit pas vérifié. Sa fréquence de coupure doit être choisie proche de $f_e/2$. Les fréquences du signal à numériser situées au-dessus de $f_e/2$ subissent en effet un repliement dans le spectre. Le filtre anti-repliement évite ce désagrément.

$$\text{Avec la méthode d'Euler, on obtient : } \boxed{U_{n+1} = \frac{K_1}{b} \epsilon_{n+1} + \frac{K_1}{b} \left(\frac{T_e}{T_1} - 1 \right) \epsilon_n + \left(1 - \frac{T_e}{b T_1} \right) U_n}$$