Chapitre 25

Ensembles finis et dénombrements

Rappelons la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$: toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément (*i.e.* si $P \subset \mathbb{N}$ et $P \neq \emptyset$, il existe $m \in P$ tel que $m \leqslant n$ pour tout $n \in P$). De même, tout partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément (*i.e.* si $P \subset \mathbb{N}$ et $P \neq \emptyset$ et il existe $A \in \mathbb{N}$ tel que $A \geqslant n$ pour tout $n \in P$, alors il existe $M \in P$ tel que $M \geqslant n$ pour tout $n \in P$).

Dans tout le chapitre, on note $E_n = [\![1, n]\!]$.

1 Cardinal d'un ensemble fini

Définition 1.1 (Ensemble fini)

Un ensemble E est fini s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E. L'entier n est alors unique, et s'appelle le *cardinal* de E (ou nombre d'éléments), et est noté $\mathrm{card}(E)$, ou $|E|$, ou $\#E$.

Remarques.

1. L'ensemble vide est le seul ensemble de cardinal 0, puisque $[\![1, 0]\!] = \emptyset$.
2. Une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E permet de numéroter les éléments de E.

Proposition 1.2

Soit E un ensemble fini.

1. Si $x \in E$, alors $E \setminus \{x\}$ est un ensemble fini de cardinal $\mathrm{card}(E) - 1$.

2. Un sous-ensemble E' de E est fini, et $\mathrm{card}(E') \leqslant \mathrm{card}(E)$ avec égalité si et seulement si $E' = E$.

Remarque.

Un ensemble fini n'est donc jamais en bijection avec un de ses sous-ensembles strict. C'est faux pour les ensembles infinis. Par exemple, l'application qui à un entier naturel associe son double est une bijection de $\mathbb{N}$ vers l'ensemble des entiers naturels pairs.

Proposition 1.3

Un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ non vide est fini si et seulement s'il est majoré.

2 Opérations sur les ensembles finis

Proposition 2.1

1. Soient A, B deux ensembles finis disjoints. Alors $A \cup B$ est un ensemble fini et $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{k=1,\ldots,n}$ une famille d'ensembles finis deux à deux disjoints. Alors leur union est un ensemble fini et on a

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{card}(A_k).$$

Proposition 2.2

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E. Alors

$$\mathrm{card}\left(C_E A\right) = \mathrm{card}(E) - \mathrm{card}(A).$$

et

$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B).$$

Proposition 2.3

1. Soient E et F deux ensembles finis. Alors l'ensemble $E \times F$ est fini et on a
$$\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F).$$

2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_p$ des ensembles finis. Alors $E_1 \times \cdots \times E_p$ est fini et
$$\operatorname{card}\Big(E_1 \times \cdots \times E_p\Big) = \operatorname{card}(E_1) \times \cdots \times \operatorname{card}(E_p).$$

3 Fonctions sur les ensembles finis

Proposition 3.1

Deux ensembles finis sont en bijection si et seulement s'ils ont même cardinal.

Proposition 3.2

Soient E et F deux ensembles finis et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. On a $\operatorname{card}(f(E)) \leqslant \operatorname{card}(F)$ avec égalité si et seulement si f est surjective.

2. On a $\operatorname{card}(f(E)) \leqslant \operatorname{card}(E)$ avec égalité si et seulement si f est injective.

Remarque.

Soit f une fonction de E vers F. Si f est injective et F est fini, alors E est fini, et si f est surjective et E est fini, alors F est fini.

Théorème 3.3

Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Alors
$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective.}$$

4 Arrangements

Définition 4.1 (p-listes)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble. Une p-liste d'éléments de E est un élément de E^p, *i.e.* un p-uplet d'éléments de E.

Proposition 4.2

L'ensemble des p-listes de E est en bijection avec l'ensemble des fonctions $[\![1,p]\!] \longrightarrow E$. Plus précisément, la fonction

$$\begin{array}{ccc} E^{[\![1,p]\!]} & \longrightarrow & E^p \\ f & \longmapsto & \big(f(1),\dots,f(p)\big) \end{array}$$

est une bijection.

Définition 4.3 (p-arrangements)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble. Un p-arrangement d'éléments de E est une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Proposition 4.4

L'ensemble des p-arrangements de E est en bijection avec l'ensemble des fonctions $[\![1,p]\!] \longrightarrow E$ injectives. Plus précisément, la fonction

$$\begin{array}{ccc} \{\text{fonctions injectives } [\![1,p]\!] \longrightarrow E\} & \longrightarrow & \{p-\text{arrangements de } E\} \\ f & \longmapsto & \big(f(1),\dots,f(p)\big) \end{array}$$

est une bijection.

Définition 4.5 (A_n^p)

On note A_n^p le nombre de p-arrangements d'un ensemble de cardinal n.

Remarque.

Le nombre d'arrangements et de listes d'un ensemble ne dépend que du cardinal de l'ensemble.

Théorème 4.6 (Nombre d'arrangements)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$A_n^p = \begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}.$$

Remarque.

Par convention, on définit $A_n^0 = 1$, cohérent avec la formule ci-dessus : il y a un 0-arrangement, c'est $\emptyset$.

5 Dénombrement de fonctions

Proposition 5.1 (Cardinal de l'ensemble des fonctions)

Soient E et F deux ensembles finis. L'ensemble $F^E = \mathcal{F}(E, F)$ des fonctions de E dans F est un ensemble fini et

$$\operatorname{card}(F^E) = (\operatorname{card}(F))^{\operatorname{card}(E)}.$$

Proposition 5.2 (Nombre d'injections)

Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinals respectifs p et n avec $p \leqslant n$. Le nombre d'injection de E dans F est A_n^p.

Corollaire 5.3 (Nombre de permutations)

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n. Le nombre de permutaions de E (*i.e.* le nombre de bijections de E dans lui-même) est $n!$.

Corollaire 5.4 (Cardinal de l'ensemble des parties)

Soit E un ensemble fini. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des sous-ensembles de E est un ensemble fini dont le cardinal est

$$2^{\operatorname{card}(E)}.$$

6 Combinaisons

Définition 6.1 (p-combinaisons)

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Une p-combinaison d'un ensemble E à n-éléments est un sous-ensemble à p éléments de E.

Définition 6.2 ($\binom{n}{p}$)

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On note $\displaystyle\binom{n}{p}$ le nombre de p-combinaisons à n-éléments, *i.e.* le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Remarque.

Ce nombre ne dépend que du cardinal de l'ensemble considéré.

Théorème 6.3 (Nombre de p-combinaisons)

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Alors

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Proposition 6.4

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$. Alors

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}, \qquad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n, \qquad \text{et si } n, p \in \mathbb{N}^*, \; \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} +$$

(Formule de Pas

Proposition 6.5

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Alors $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

Proposition 6.6 (Formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif K, et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}.$$

Méthode 6.7

1. Les p-combinaisons correspondent aux tirages simultanés de p boules dans une urne.

2. Les p-listes correspondent aux tirages successifs avec remise de p boules (et l'ordre et important).

3. Les p-arrangements correspondent aux tirages successifs sans remise de p boules (où l'ordre est important).

7 Compétences