DEVOIR SURVEILLÉ 6 – Sujet CCINP 20/03/24 Durée 4h

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est constitué de trois exercices totalement indépendants.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

EXERCICE 1

Extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée

On se donne un entier $n \geqslant 2$. On rappelle que la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

On note $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.
On fixe des réels $a_{i,j}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ et on considère l'application $f : B_n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} x_i x_j \right) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier le maximum et le minimum de la fonction f sur la partie B_n.
On rappelle que :

— le réel α est le maximum de f sur B_n lorsque

$$\forall x \in B_n, f(x) \leqslant \alpha \text{ et } \exists y \in B_n,\ \alpha = f(y)\,;$$

— le réel α est le minimum de f sur B_n lorsque

$$\forall x \in B_n, f(x) \geqslant \alpha \text{ et } \exists y \in B_n,\ \alpha = f(y).$$

On définit la matrice $M_f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme la matrice **symétrique** dont les coefficients $(m_{i,j})$ vérifient :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,i} & \text{si } i = j \\ \dfrac{a_{i,j}}{2} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Si M est une matrice à coefficients réels, on note $M^\top$ sa matrice transposée.

Partie I - Étude théorique

Q1. Par un résultat de cours, justifier que l'application f admet un maximum et un minimum sur B_n.

On considère un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B_n$ et on note $X = (x_1 \cdots x_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q2. Montrer que $f(x) = X^\top M_f X$.

Q3. Justifier que la matrice M_f est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de M_f comptées avec leur multiplicité et on suppose que $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$.
On fixe une matrice **orthogonale** $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M_f = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On note $Y = P^{-1}X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q4. Montrer les égalités $Y^\top Y = X^\top X = \|x\|^2$.

Q5. On suppose que $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$.
Montrer que $\lambda_1 \leqslant Y^\top DY \leqslant \lambda_n$ et en déduire que $\lambda_1 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_n$.

Q6. Soit λ une valeur propre de M_f et $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de M_f associé à la valeur propre λ. On pose $V = \dfrac{1}{\sqrt{U^\top U}}U$. Calculer $V^\top M_f V$.

Q7. En déduire que si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, alors $\max_{B_n}(f) = \lambda_n$ et $\min_{B_n}(f) = \lambda_1$.

Q8. Dans le cas où $\lambda_1 \geqslant 0$, déterminer le maximum et le minimum de f sur B_n.

Partie II - Application des résultats

Exemple 1 : Dans ce premier exemple, on suppose que $n = 2$ et que l'application $f : B_2 \mapsto \mathbb{R}$ est définie par

$$\forall (x_1, x_2) \in B_2,\ f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2.$$

Q9. Déterminer M_f dans ce cas et en déduire le maximum et le minimum de f sur B_2.

Exemple 2 : Dans ce deuxième exemple, on suppose que $n \geqslant 3$ et que l'application $f : B_n \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in B_n, \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2x_i x_j.$$

Q10. Déterminer le maximum et le minimum de l'application f sur B_n (on pourra commencer par déterminer le rang de la matrice $M_f - 2I_n$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

EXERCICE 2

Polynômes de Legendre

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.
On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X]\ ,\ \phi(P) = \left(X^2-1\right)\, P'' + 2XP'\,.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$U_n = \left(X^2-1\right)^n \qquad \text{et} \qquad L_n = \frac{1}{2^n\, n!}\, U_n^{(n)}.$$

Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre.*

Partie I - Quelques résultats généraux

Q11. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}\,(3X^2-1)$.

Q12. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est de degré n.

Q13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q14. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Partie II - Étude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

Dans les questions **Q15** à **Q21**, n désigne un entier naturel.

Q15. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ.
Cet endomorphisme ϕ_n est donc défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\ ,\ \phi_n(P) = \phi(P)\,.$$

Q16. On note $M = (m_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in [\![0,n]\!]\ ,\ m_{k,k} = k\,(k+1)$.

Q17. Montrer que ϕ_n est diagonalisable. *On pourra utiliser la question **Q16**.*

Q18. Vérifier que : $\forall k \in [\![0,n]\!]\ ,\ (X^2-1)\ U_k' - 2kXU_k = 0$.

Q19. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question **Q18**, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que :

$$\left(X^2-1\right)\, U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k\,(k+1)\,U_k^{(k)} = 0.$$

Q20. Montrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$ le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n, en précisant la valeur propre associée. *On pourra utiliser la question* ***Q19***.

Q21. Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés à ϕ_n puis à ϕ.

Dans la suite du problème, pour P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

Q22. Justifier que $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note $\|.\|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f(t)^2\, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$.

Q23. Établir que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle \phi(P), Q\rangle = -\int_{-1}^{1} \left(t^2 - 1\right) P'(t)\, Q'(t)\, \mathrm{d}t$, puis que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2\ ,\ \langle \phi(P), Q\rangle = \langle P, \phi(Q)\rangle\ .$$

Q24. Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle ., .\rangle$. *On pourra utiliser la question* ***Q20***.

Q25. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ , \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\ ,\ \langle P, L_n\rangle = 0$.

Q26. On admet que $\|L_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\, L_n$. Que peut-on dire de la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $\langle ., .\rangle$?

Dans la suite de cette partie, P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{d}(P, \mathbb{R}_n[X]) = \inf\limits_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|P - Q\|$ la distance de P au sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$.

Q27. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant un résultat de votre cours, justifier qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\mathrm{d}(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$, puis justifier l'égalité :

$$\mathrm{d}(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(P))^2\ \ \text{, où } c_k(P) = \langle P, Q_k\rangle\ .$$

Q28. Prouver que la série $\sum (c_k(P))^2$ converge et que : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (c_k(P))^2 \leqslant \|P\|^2$.

EXERCICE 3

Loi forte des grands nombres

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $[-1, 1]$.
On suppose que X est centrée c'est-à-dire X est d'espérance finie et $E(X) = 0$.
On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et de même loi que X.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Partie I. Majoration de $E(e^{tX})$

Dans les questions **Q29** à **Q34**, t désigne un réel strictement positif.

Q29. On rappelle que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe alors pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leqslant \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v).$$

Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$e^{tx} \leqslant \frac{1 - x}{2} e^{-t} + \frac{1 + x}{2} e^{t}.$$

Q30. En déduire que la variable aléatoire e^{tX} est d'espérance finie et :

$$E(e^{tX}) \leqslant \operatorname{ch}(t).$$

Q31. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

Q32. En déduire que :

$$E(e^{tX}) \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Partie II. Inégalité de Hoeffding

Dans toute cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

Q33. Montrer que :

$$P(e^{tnS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon}) \leqslant \frac{E(e^{tnS_n})}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Q34. En déduire que :

$$P(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\left(E(e^{tX})\right)^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Q35. Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto -tn\varepsilon + n\dfrac{t^2}{2}$ atteint un minimum en un point que l'on précisera.

Q36. En déduire que $P(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$ puis que :

$$P(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Partie III. Loi forte des grands nombres

Q37. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $P(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

Q38. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n = \bigcup_{m \geqslant n} \{\omega \in \Omega\,;\ |S_n(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} P(B_n) = 0$ et en déduire que :

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = 0.$$

Q39. Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\Omega_k = \{\omega \in \Omega\,;\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geqslant n,\ |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\}.$$

Écrire l'événement $A = \{\omega \in \Omega\,;\ \lim_{n \to +\infty} S_n(\omega) = 0\}$ à l'aide des événements Ω_k, $k \in \mathbb{N}^*$.

Q40. Déduire des questions précédentes que :

$$P(A) = 1.$$

FIN