CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 6 - Sujet 1

EXERCICE 1 : Extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée (CCINP PC 2020)

Q1. L'application f est continue sur $\mathbb{R}^n$ car elle est polynômiale en les coordonnées dans la base canonique.
De plus, B_n est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ (car il s'agit de la boule unité fermée), non vide et $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie.
On en déduit par le théorème des bornes atteintes que :

$$\boxed{f \text{admet un maximum et un minimum sur } B_2.}$$

Q2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(M_f X)_i = \sum_{j=1}^{n} (M_f)_{i,j}(X)_j = \sum_{j=1}^{n} (M_f)_{i,j} x_j$ donc

$$\begin{aligned}
X^\top M_f X &= \sum_{i=1}^{n} (X^\top)_i (M_f X)_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (M_f)_{i,j} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_f)_{i,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} (M_f)_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} (M_f)_{i,j} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} m_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} m_{i,j} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} m_{i,j} x_i x_j + \sum_{1\le j<i\le n} m_{i,j} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} m_{i,j} x_i x_j + \sum_{1\le j<i\le n} m_{j,i} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} m_{i,j} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} \frac{a_{i,j}}{2} x_i x_j \\
&= \sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j} x_i x_j = f(x).
\end{aligned}$$

On a bien :

$$\boxed{f(x) = X^\top M_f X.}$$

Q3. La matrice M_f est symétrique réelle donc d'après le théorème spectral :

$$\boxed{\text{la matrice } M_f \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Q4. On a $X = PY$ donc :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^\top X = (PY)^\top (PY) = Y^\top P^\top P Y \underset{P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{=} Y^\top I_n Y = Y^\top Y.$$

Ainsi :

$$\boxed{Y^\top Y = X^\top X = \|x\|^2.}$$

Q5. • Posons $Y = (y_1, \dots, y_n)^\top$.
D'après la question précédente, $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = Y^\top Y = \|x\|^2 \le 1$ et, comme

$$Y^\top D Y = Y^\top \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2,$$

on a

$$\begin{aligned}
Y^\top DY &= \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n y_i^2 \quad \text{(car pour tout } i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \leq \lambda_n \text{ et } y_i^2 \geq 0) \\
&= \underbrace{\lambda_n}_{\geq 0} \underbrace{\sum_{i=1}^n y_i^2}_{\leq 1} \leq \lambda_n \\
\text{et}\quad Y^\top DY &= \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_1 y_i^2 \quad \text{(car pour tout } i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \geq \lambda_1 \text{ et } y_i^2 \geq 0) \\
&= \underbrace{\lambda_1}_{\leq 0} \underbrace{\sum_{i=1}^n y_i^2}_{\leq 1} \geq \lambda_1,
\end{aligned}$$

donc on a bien :

$$\boxed{\lambda_1 \leq Y^\top DY \leq \lambda_n.}$$

• Or, pour tout $x \in B_2$, comme P est orthogonale,

$$f(x) = X^\top M_f X = X^\top PDP^\top X = (P^\top X)^\top D(P^\top X) = (P^{-1}X)^\top D(P^{-1}X) = Y^\top DY.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lambda_1 \leq f(x) \leq \lambda_n.}$$

Q6. Remarquons que $\sqrt{U^\top U} = \|U\|$ (norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) et comme U est non nul (puisque c'est un vecteur propre), on a $\|U\| \neq 0$.
On a de plus, $M_f U = \lambda U$ donc :

$$V^\top M_f V = \frac{1}{\|U\|^2} U^\top M_f U = \frac{\lambda}{\|U\|^2} U^\top U = \lambda.$$

Ainsi :

$$\boxed{V^\top M_f V = \lambda.}$$

Q7. Supposons $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$.
• Soit U un vecteur propre de M_f associé à la valeur propre λ_1.
On pose $V = \dfrac{1}{\sqrt{U^\top U}} U$. On note $V = (v_1 \cdots v_n)^\top$ et on pose alors $v = (v_1, \ldots, v_n)$.
De même qu'à la **Q4**, on a $\|v\|^2 = V^\top V = \dfrac{1}{U^\top U} U^\top U = 1$ donc $v \in B_n$.
De plus, par les questions **Q2** et **Q6**, on a $f(v) = V^\top M_f V = \lambda_1$.
On a donc pour tout $x \in B_n$, $f(x) \geq \lambda_1$ (par **Q5**) et $f(v) = \lambda_1$ avec $v \in B_n$.
On en déduit que λ_1 est le minimum de f sur B_n.
• On procède de même pour le maximum en prenant un vecteur propre U de M_f associé à la valeur propre λ_n.
Ainsi :

$$\boxed{\text{si } \lambda_1 < 0 < \lambda_n \text{ alors } \max_{B_n}(f) = \lambda_n \text{ et } \min_{B_n}(f) = \lambda_1.}$$

Q8. Supposons $\lambda_1 \geq 0$.
• Alors, pour tout $x \in B_n$, en gardant les notations de cette partie, on a

$$f(x) = X^\top M_f X = Y^\top DY = \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \underbrace{x_i^2}_{\geq 0} \geq 0,$$

et comme $f((0,\ldots,0)) = 0$ et $(0,\ldots,0) \in B_n$, on a $\min\limits_{B_n}(f) = 0$.
• L'étude faite pour le maximum dans les questions précédentes reste valable ici, donc on a $\max\limits_{B_n}(f) = \lambda_n$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{si } \lambda_1 \geq 0 \text{ alors } \max_{B_n}(f) = \lambda_n \text{ et } \min_{B_n}(f) = 0.}$$

Q9 On a $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ qui a pour polynôme caractéristique :

$$\chi_{M_f}(X) = X^2 - \operatorname{tr}(M_f)X + \det(M_f) = X^2 - 2X - 3 = (X-3)(X+1),$$

donc $\operatorname{Sp}(M_f) = \{-1, 3\}$. Comme $-1 < 0 < 3$, on en déduit par **Q7** que :

$$\boxed{\text{le maximum de } f \text{ sur } B_2 \text{ est } 3 \text{ et le minimum de } f \text{ sur } B_2 \text{ est } -1.}$$

Q10. On a $M_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $M_f - 2I_n = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(M_f - 2I_n) \leq 1$ (car toutes les colonnes de $M_f - 2I_n$ sont identiques) et $\mathrm{rg}(M_f - 2I_n) \geq 1$ (car ce n'est pas la matrice nulle), donc $\mathrm{rg}(M_f - 2I_n) = 1$.
D'après le théorème du rang, on a donc :

$$\dim \mathrm{Ker}\,(M_f - 2I_n) = n - \mathrm{rg}(M_f - 2I_n) = n - 1 \neq 0,$$

donc 2 est valeur propre de M_f et $E_2(M_f) = \mathrm{Ker}\,(M_f - 2I_n)$ est de dimension $n-1$.
Comme M_f est diagonalisable, on en déduit :
— 2 est valeur propre de M_f de multiplicité exactement $n-1$.
— M_f a exactement n valeurs propres, comptées avec multiplicité, donc il reste une dernière valeur propre, que l'on note λ.
— χ_{M_f} est scindé, donc la trace de M_f est égale à la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité donc :

$$n = \mathrm{tr}(M_f) = 2(n-1) + \lambda \Leftrightarrow \lambda = -n + 2.$$

On a donc $\mathrm{Sp}\,(f) = \{-n+2, 2\}$, et, comme $-n+2 < 0$ et $2 > 0$, on a :

$$\boxed{\min_{B_n}(f) = -n+2 \quad \text{et} \quad \max_{B_n}(f) = 2.}$$

EXERCICE 2 : Polynômes de Legendre (CCINP PC 2017)

Q11. $U_0 = 1$ et $L_0 = \dfrac{1}{2^0 0!} U_0^{(0)} = 1$.
$U_1 = X^2 - 1$ et $L_1 = \dfrac{1}{2^1 1!} U_1^{(1)} = \dfrac{1}{2}(2X) = X$.
$U_2 = (X^2-1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$ et $L_2 = \dfrac{1}{2^2 2!} U_2^{(2)} = \dfrac{1}{8}(4X^3 - 4X)' = \dfrac{1}{8}(12X^2 - 4) = \dfrac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

$$\boxed{L_0 = 1,\ L_1 = X \text{ et } L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1).}$$

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}$.
En tant que produit de n polynômes de degrés 2, U_n est un polynôme de degré $\underbrace{2 + \cdots + 2}_{n \text{termes}} = 2n$.
De plus, on sait que Q est un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 alors $\deg(Q') = \deg(Q) - 1$.
Par récurrence, on en déduit que si Q est un polynôme de degré supérieur ou égal à n alors $\deg(Q^{(n)}) = \deg(Q) - n$.
Comme ici $2n \geq n$, on en déduit que $\deg(U_n^{(n)}) = 2n - n = n$.
Comme $\dfrac{1}{2^n n!} \neq 0$, on en déduit que :

$$\boxed{L_n \text{ est un polynôme de degré } n.}$$

Q13. La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est libre (car constituée de polynômes non nuls de degrés échelonnés) et elle est composée de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$.
Ainsi :

$$\boxed{(L_0, \ldots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Q14. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \phi(\lambda P + Q) &= (X^2-1)(\lambda P + Q)'' + 2X(\lambda P + Q)' \\ &= (X^2-1)(\lambda P'' + Q'') + 2X(\lambda P' + Q') \quad \text{(linéarité de la dérivation)} \\ &= \lambda((X^2-1)P'' + 2XP') + ((X^2-1)Q'' + 2XQ') \\ &= \lambda\phi(P) + \phi(Q) \end{aligned}$$

donc ϕ est une application linéaire.
De plus, elle va de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ (énoncé) donc :

$$\boxed{\phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].}$$

Q15. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) \in \mathbb{R}[X]$ et

$$\deg\left((X^2-1)P''\right) = \deg(X^2-1) + \deg(P'') = 2 + \deg(P'') \leq 2 + \deg(P) - 2 = \deg(P) \leq n$$

et

$$\deg(2XP') = \deg(2X) + \deg(P') = 1 + \deg(P') \leq 1 + \deg(P) - 1 = \deg(P) \leq n$$

donc $(X^2-1)P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $2XP' \in \mathbb{R}_n[X]$ et comme $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire, on en déduit que

$$\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X].$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{R}_n[X] \text{ est stable par } \phi.}$$

Q16. Soit $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors, $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $\phi(X^j) = \sum_{i=0}^{n} m_{i,j} X^i$.

Or,

$$\begin{aligned}
\phi(X^0) &= \phi(1) = 0 \\
\phi(X^1) &= 2X \\
\text{et, pour tout } j \in [\![2,n]\!], \phi(X^j) &= (X^2-1)j(j-1)X^{j-2} + 2XjX^{j-1} \\
&= j(j-1)X^j - j(j-1)X^{j-2} + 2jX^j = j(j+1)X^j - j(j-1)X^{j-2}.
\end{aligned}$$

Par identification, on a :

$$\begin{aligned}
m_{0,0} = 0 = 0(0+1) \quad &\text{et} \quad \forall i \geq 1,\ m_{i,0} = 0 \\
m_{1,1} = 2 = 1 \times 2 \quad &\text{et} \quad \forall i \geq 2,\ m_{i,1} = 0 \\
\forall j \in [\![2,n]\!],\ m_{j,j} = j(j+1) \quad &\text{et} \quad \forall i \geq j+1,\ m_{i,j} = 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{M \text{ est triangulaire supérieure et } \forall k \in [\![0,n]\!],\ m_{k,k} = k(k+1).}$$

Q17. Comme M est triangulaire, ses valeurs propres sont ses cœfficients diagonaux.
On a donc $\mathrm{Sp}(M) = \{k(k+1),\ k \in [\![0,n]\!]\}$.
Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)(k+2) - k(k+1) = 2(k+1) > 0$ donc la suite $(m_{k,k})_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Les réels $(k(k+1))_{k \in [\![0,n]\!]}$ sont donc deux à deux distincts donc M admet $n+1$ valeurs propres distinctes.
Comme $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, on en déduit que M est diagonalisable et comme c'est la matrice de ϕ_n dans une base,

$$\boxed{\phi_n \text{ est diagonalisable.}}$$

Q18. • Pour $k = 0$, $U_k' = 0$ et $2kXU_k = 0$ donc $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.
• Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $U_k' = 2kX(X^2-1)^{k-1}$ donc $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 2kXU_k - 2kXU_k = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0,n]\!], \text{ on a } (X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0.}$$

Q19. D'après la formule de Leibniz (les polynômes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) en prenant la convention (habituelle) $\binom{n}{k} = 0$ si $k \notin [\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
((X^2-1)U_k')^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (X^2-1)^{(i)} (U_k')^{(k+1-i)} \\
&= \binom{k+1}{0}(X^2-1)(U_k')^{(k+1)} + \binom{k+1}{1}(X^2-1)'(U_k')^{(k)} + \binom{k+1}{2}(X^2-1)''(U_k')^{(k-1)} \\
&\quad + \sum_{k=3}^{k+1-i} \binom{k+1}{i} \underbrace{(X^2-1)^{(i)}}_{=0 \text{ car } i \geq 3} (U_k')^{(k+1-i)} \\
&= (X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2(k+1)XU_k^{(k+1)} + 2\frac{k(k+1)}{2}U_k^{(k)} \\
\text{et } (2kXU_k)^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (2kX)^{(i)} (U_k)^{(k+1-i)} \\
&= \binom{k+1}{0}(2kX)(U_k)^{(k+1)} + \binom{k+1}{1}(2kX)'(U_k)^{(k)} + \sum_{i=2}^{k+1} \binom{k+1}{i} \underbrace{(2kX)^{(i)}}_{=0 \text{ car } i \geq 2} (U_k)^{(k+1-i)} \\
&= 2kXU_k^{(k+1)} + (k+1)2kU_k^{(k)},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}((X^2-1)U_k'-2kXU_k)^{(k+1)} &= (X^2-1)U_k^{(k+2)}+2(k+1)XU_k^{(k+1)}+k(k+1)U_k^{(k)}-2kXU_k^{(k+1)}-(k+1)2kU_k^{(k)}\\ &= (X^2-1)U_k^{(k+2)}+2XU_k^{(k+1)}-k(k+1)U_k^{(k)}.\end{aligned}$$

Par suite, d'après la question **Q18**,

$$(X^2-1)U_k^{(k+2)}+2XU_k^{(k+1)}-k(k+1)U_k^{(k)} = ((X^2-1)U_k'-2kXU_k)^{(k+1)} = (0)^{(k+1)} = 0.$$

$$\boxed{(X^2-1)U_k^{(k+2)}+2XU_k^{(k+1)}-k(k+1)U_k^{(k)} = 0.}$$

Q20. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $L_k\in\mathbb{R}_n[X]$, $L_k\neq 0$ (car $0\leq \deg(L_k)=k\leq n$) et :

$$\phi_n(L_k)=\phi(U_k^{(k)})=(X^2-1)U_k^{(k+2)}+2XU_k^{(k+1)} \underset{\text{Q19}}{=} k(k+1)U_k^{(k)} = k(k+1)L_k.$$

On en déduit que :

$\boxed{\text{pour tout } k\in[\![0,n]\!],\ L_k \text{ est un vecteur propre de } \phi_n \text{ associé à la valeur propre } k(k+1).}$

Q21 • ϕ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (de dimension $n+1$) qui admet $n+1$ valeurs propres distinctes, donc tous les espaces propres de ϕ_n sont de dimension 1.
De plus, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $L_k\in E_{k(k+1)}(\phi_n)$ donc $\mathrm{Vect}(L_k)\subset E_{k(k+1)}(\phi_n)$ et par égalité des dimensions, $E_{k(k+1)}(\phi_n)=\mathrm{Vect}(L_k)$.
On a donc $\boxed{\mathrm{Sp}(\phi_n)=\{k(k+1),\ k\in[\![0,n]\!]\} \text{ et, pour tout } k\in[\![0,n]\!],\ E_{k(k+1)}(\phi_n)=\mathrm{Vect}(L_k).}$
• Pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour tout $P\in\mathrm{Vect}(L_k)=E_{k(k+1)}(\phi_k)$, on a :

$$\phi(P)=\phi_k(P)=k(k+1)P.$$

C'est en particulier vrai pour $P=L_k$ qui est non nul.
On en déduit que $\{k(k+1),\ k\in\mathbb{N}\}\subset\mathrm{Sp}(\phi)$ et, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(L_k)\subset E_{k(k+1)}(\phi)$.
• Réciproquement, soit λ une valeur propre de ϕ et $P\neq 0$ un vecteur propre associé à λ.
Soit $n=\deg(P)$. Alors

$$\lambda P=\phi(P)=\phi_n(P),$$

donc P est un vecteur propre de ϕ_n associé à la valeur propre (de ϕ_n) λ.
Par suite, $\lambda\in\mathrm{Sp}(\phi_n)$ donc il existe $k\in[\![0,n]\!]$ tel que $\lambda=k(k+1)$ et $P\in E_{k(k+1)}(\phi_n)=\mathrm{Vect}(L_k)$.
On a donc $\mathrm{Sp}(\phi)\subset\{k(k+1),\ k\in\mathbb{N}\}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, $E_{k(k+1)}(\phi)\subset\mathrm{Vect}(L_k)$.
• Par double inclusion, on en déduit :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\phi)=\{k(k+1),\ k\in\mathbb{N}\}\quad\text{et}\quad\forall k\in\mathbb{N},\quad E_{k(k+1)}(\phi)=\mathrm{Vect}(L_k).}$$

Q22. • Pour tout $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, $\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ existe car $t\mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le segment $[-1,1]$.
• Pour tout $P,Q,R\in\mathbb{R}[X]$, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\langle(\lambda P+Q),R\rangle &= \int_{-1}^1(\lambda P+Q)(t)R(t)dt\\ &= \int_{-1}^1 \lambda P(t)R(t)+Q(t)R(t)dt\\ &= \lambda\int_{-1}^1 P(t)R(t)dt+\int_{-1}^1 Q(t)R(t)dt\quad\text{(par linéarité de l'intégrale)}\\ &= \lambda\langle P,R\rangle+\langle Q,R\rangle,\end{aligned}$$

donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche.
• Pour tout $P,Q\in\mathbb{R}[X]$,

$$\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt=\int_{-1}^1 Q(t)P(t)dt=\langle Q,P\rangle,$$

donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique.
• $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique et linéaire à gauche, donc bilinéaire.
• Pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$,

$$\langle P,P\rangle=\int_{-1}^1(P(t))^2dt\geq 0$$

par positivité de l'intégrale (on a bien $-1\leq 1$) donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est positif.
• Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P,P\rangle=0$.
Comme $t\mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[-1,1]$ et $-1\neq 1$,

$$\langle P,P\rangle=0\Leftrightarrow\int_{-1}^1(P(t))^2dt=0\Leftrightarrow\forall t\in[-1,1],\ P(t)=0.$$

Par suite, P a une infinité de racines donc P est nul.
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc défini.
On peut donc conclure :

$$\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

Q23. Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$\langle\phi(P),Q\rangle = \int_{-1}^{1}((t^2-1)P''(t)+2tP'(t))Q(t)dt.$$

Posons $u'(t) = (t^2-1)P''(t)+2tP'(t)$, $u(t) = (t^2-1)P'(t)$, $v(t) = Q(t)$, $v'(t) = Q'(t)$.
Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$, on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}\langle\phi(P),Q\rangle &= \int_{-1}^{1}((t^2-1)P''(t)+2tP'(t))Q(t)dt \\ &= \underbrace{\left[(t^2-1)P'(t)Q(t)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)dt = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)dt.\end{aligned}$$

Cette dernière écriture étant symétrique en P et Q, on obtient :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle\phi(P),Q\rangle = \langle\phi(Q),P\rangle \underset{\text{par symétrie de } \langle\cdot,\cdot\rangle}{=} \langle P,\phi(Q)\rangle.$$

Q24. Soit k et n deux entiers naturels distincts. On a :

$$\begin{aligned}k(k+1)\langle L_k,L_n\rangle &= \langle k(k+1)L_k,L_n\rangle \quad \text{(linéarité à gauche)} \\ &= \langle\phi(L_k),L_n\rangle \quad (\text{car } L_k \in E_{k(k+1)}(\phi)) \\ &= \langle L_k,\phi(L_n)\rangle \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \langle L_k, n(n+1)L_n\rangle \quad (\text{car } L_n \in E_{n(n+1)}(\phi)) \\ &= n(n+1)\langle L_k,L_n\rangle \quad \text{(linéarité à droite),}\end{aligned}$$

donc $(k(k+1)-n(n+1))\langle L_k,L_n\rangle = 0$, donc $\langle L_k,L_n\rangle = 0$, car, comme $(k(k+1))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante (cf. question **Q16**), $k(k+1) \neq n(n+1)$.

$$\boxed{\text{La famille } (L_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc bien orthogonale pour le produit scalaire } \langle\cdot,\cdot\rangle.}$$

Q25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme $(L_0,\dots,L_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (cf. question **Q13**), pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe n réels $a_0,\cdots,a_{n-1}$ tels que $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_iL_i$. Par suite :

$$\begin{aligned}\langle P,L_n\rangle &= \left\langle \sum_{i=0}^{n-1} a_iL_i, L_n\right\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i\langle L_i,L_n\rangle \quad \text{(linéarité à gauche)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 0 \quad (\text{car, pour tout } i \in [\![0,n-1]\!],\ i \neq n \text{ et d'après la question } \textbf{Q24}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \langle P,L_n\rangle = 0.}$$

Q26. • Soit k et n deux entiers naturels distincts. On a :

$$\langle Q_k,Q_n\rangle = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\langle L_k,L_n\rangle = 0,$$

donc la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
• De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|Q_n\| \underset{\text{homogénéité}}{=} \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\|L_n\| = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\sqrt{\frac{2}{2n+1}} = 1,$$

donc :

$$\boxed{(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une famille orthonormale pour le produit scalaire } \langle\cdot,\cdot\rangle.}$$

Q27. Soit $n \in \mathbb{N}$.
• $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$.
Donc, d'après la caractérisation par la distance du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$ et T_n est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X]$.
• D'après le théorème de Pythagore, comme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P - T_n \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$, on a :

$$\|P\|^2 = \|T_n\|^2 + \|P - T_n\|^2,$$

donc

$$\begin{aligned} d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P - T_n\|^2 &= \|P\|^2 - \|T_n\|^2 \\ &= \|P\|^2 - \left\| \sum_{k=0}^{n} \langle P, Q_k \rangle Q_k \right\|^2 \quad \text{(caractérisation du projeté orthogonal dans une base orthonormée)} \\ &= \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \langle P, Q_k \rangle^2 \quad \text{(car } (Q_k) \text{ est une famille orthonormale)} \\ &= \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(P))^2, \qquad \text{où } c_k(P) = \langle P, Q_k \rangle. \end{aligned}$$

$$\boxed{d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(P))^2.}$$

Q28. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} (c_k(P))^2 = \|P\|^2 - d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 \leq \|P\|^2$.
Ainsi, la série $\sum (c_k(P))^2$ est une série à termes positifs donc la suite des sommes partielles est majorée.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum (c_k(P))^2 \text{ converge.}}$$

Et par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus, on a de plus :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k(P))^2 \leq \|P\|^2.}$$

EXERCICE 3 : Loi forte des grands nombres (CCINP PSI 2018)

Q29. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ car elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est positive.
Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $u = -t$, $v = t$ et $\lambda = \dfrac{1-x}{2}$. On a bien $\lambda \in [0, 1]$ (puisque $x \in [-1, 1]$). On a alors :

$$\exp(\lambda u + (1 - \lambda) v) = \exp\Big(\frac{1-x}{2}(-t) + (1 - \frac{1-x}{2})t\Big) = \exp\Big(\frac{-t + tx + 2t - t + tx}{2}\Big) = \exp(tx)$$

et

$$\lambda \exp(u) + (1 - \lambda)\exp(v) = \frac{1-x}{2}\exp(-t) + (1 - \frac{1-x}{2})\exp(t) = \frac{1-x}{2}\exp(-t) + \frac{1+x}{2}\exp(t).$$

Par l'inégalité de convexité, on en déduit que :

$$\boxed{e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.}$$

Q30. Comme la variable aléatoire X est à valeurs dans $[-1, 1]$, on a par la question précédente :

$$0 \leq e^{tX} \leq \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^{t}.$$

Comme X est d'espérance finie et les variables constantes également, on sait par linéarité que $\dfrac{1-X}{2}e^{-t} + \dfrac{1+X}{2}e^{t}$ est d'espérance finie et :

$$E\left(\frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^{t}\right) = \frac{1-E(X)}{2}e^{-t} + \frac{1+E(X)}{2}e^{t} = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} = \mathrm{ch}(t).$$

car $E(X) = 0$.
Par comparaison par inégalité, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } e^{tX} \text{ est d'espérance finie}}$$

et par croissance de l'espérance :

$$\boxed{E(e^{tX}) \leq \mathrm{ch}(t).}$$

Q31. Soit $k \in \mathbb{N}$.
Si $k \geq 1$, on a

$$(2k)! = k! \prod_{j=1}^{k} (k+j) \geq k! \prod_{j=1}^{k} 2 = 2^k k! > 0$$

et l'inégalité est aussi vraie pour $k = 0$ $(1 = 1)$.
En en prenant l'inverse puis en multipliant par la quantité positive t^{2k}, on obtient :

$$\boxed{\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.}$$

Q32. En utilisant les développements en série entière des fonctions ch et exp (de rayons de convergence égaux à $+\infty$), on obtient :

$$\operatorname{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!}.$$

En sommant l'inégalité obtenue à la question **Q31**, on a donc :

$$\operatorname{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

et comme on a prouvé à la question **Q30** l'inégalité $E(e^{tX} \leq \operatorname{ch}(t)$, on en déduit que :

$$\boxed{E(e^{tX}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}.}$$

Q33. En appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire e^{tS_n} qui est positive, avec $e^{tn\varepsilon} > 0$, on obtient :

$$\boxed{P(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{E(e^{tnS_n})}{e^{tn\varepsilon}}.}$$

Q34. Comme la fonction $x \mapsto e^{tnx}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car $tn > 0$), les événements $(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon})$ et $(S_n \geq \varepsilon)$ sont égaux.
Par la question précédente, on en déduit que :

$$P(S_n \geq \varepsilon) \leq \frac{E(e^{tnS_n})}{e^{tn\varepsilon}}.$$

On a de plus :

$$e^{tnS_n} = e^{t(X_1+\cdots+X_n)} = e^{tX_1} \times \cdots \times e^{tX_n}.$$

Comme pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \sim X$, on a aussi $e^{tX_k} \sim e^{tX}$ donc e^{tX_k} est d'espérance finie et $E(e^{tX_k}) = E(e^{tX})$.
Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ étant indépendantes, il en est de même pour les variables aléatoires $e^{tX_1}, \ldots, e^{tX_n}$.
On en déduit par propriété de l'espérance que :

$$E\left(\prod_{k=1}^{n} e^{tX_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} E(e^{tX_k}) = \prod_{k=1}^{n} E(e^{tX}) = \left(E(e^{tX})\right)^n.$$

Ainsi :

$$\boxed{P(S_n \geq \varepsilon) \leq \frac{\left(E(e^{tX})\right)^n}{e^{tn\varepsilon}}.}$$

Q35. La fonction $\varphi : t \mapsto -tn\varepsilon + n\dfrac{t^2}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(t) = -n\varepsilon + nt = n(-\varepsilon + t).$$

On a donc pour tout $t \in]-\infty, \varepsilon]$, $\varphi'(t) \leq 0$ et pour tout $t \in [\varepsilon, +\infty[$, $\varphi'(t) \geq 0$.
La fonction φ est donc décroissante sur $]-\infty, \varepsilon]$ et croissante sur $[\varepsilon, +\infty[$ donc elle atteint un minimum en ε, qui vaut $\varphi(\varepsilon) = -n\varepsilon^2 + n\dfrac{\varepsilon^2}{2} = -n\dfrac{\varepsilon^2}{2}$.

$$\boxed{\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto -tn\varepsilon + n\frac{t^2}{2} \text{ atteint un minimum en } \varepsilon, \text{ qui vaut } -n\frac{\varepsilon^2}{2}.}$$

Q36. Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$ et par les questions **Q34** et **Q32**, on a :

$$P(S_n \geq \varepsilon) \leq \frac{e^{\frac{nt^2}{2}}}{e^{tn\varepsilon}} = e^{\varphi(t)}.$$

Ce résultat étant valable pour tout $t > 0$, en l'appliquant avec $t = \varepsilon$ (choix optimal d'après la question précédente), on obtient :

$$\boxed{P(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.}$$

On a de plus $(|S_n| \geq \varepsilon) = (S_n \geq \varepsilon) \cup (-S_n \geq \varepsilon)$ et ces deux derniers événements sont incompatibles donc :

$$P(|S_n| \geq \varepsilon) = P(S_n \geq \varepsilon) + P(-S_n \geq \varepsilon).$$

Remarquons que :

$$-S_n = \frac{(-X_1) + \cdots + (-X_n)}{n}.$$

De plus, $-X$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[-1,1]$, centrée (par linéarité de l'espérance $E(-X) = -E(X) = 0$) et la suite $(-X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes et de même loi que $-X$. En appliquant le résultat établi précédemment, on obtient que :

$$P(-S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.}$$

Q37. Soit $\varepsilon > 0$. Par croissance de la probabilité, comme $(|S_n| > \varepsilon) \subset (|S_n| \geq \varepsilon)$, on a :

$$0 \leq P(|S_n| > \varepsilon) \leq P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2\varepsilon^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Le théorème de comparaison et la convergence de la série géométrique de raison $e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} \in]0,1[$ assurent alors la convergence de la série de terme général $P(|S_n| > \varepsilon)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ la série de terme général } P(|S_n| > \varepsilon) \text{ converge.}}$$

Q38. Par propriété de sous-additivité, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq P(B_n) \leq \sum_{m=n}^{+\infty} P(|S_n| > \varepsilon).$$

Comme la suite des restes d'une série convergente converge vers 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{m=n}^{+\infty} P(|S_n| > \varepsilon) = 0$ d'où par le théorème de limite par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0.}$$

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante au sens de l'inclusion, on a par la propriété de continuité décroissante :

$$\boxed{P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0.}$$

Q39. Soit $\omega \in \Omega$.
Par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\omega) = 0$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $m \geq n$, $|S_m(\omega) - 0| \leq \varepsilon$ (i).
Ceci est encore équivalent à l'assertion :
pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $m \geq n$, $|S_m(\omega) - 0| \leq \dfrac{1}{k}$ (ii).
En effet, pour montrer (i) implique (ii), il suffit d'appliquer le résultat avec $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$ et pour montrer (ii) implique (i), il suffit de constater qu'il existe un entier k tel que $\dfrac{1}{k} \leq \varepsilon$ (prendre $k = \lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$).
Par les opérations sur les ensembles, on en déduit que :

$$\boxed{A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \Omega_k.}$$

Q40. Posons pour plus de clarté $B_n(\varepsilon) = B_n$. On peut écrire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega\,;\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geq n{:} |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \left\{\omega \in \Omega\,;\ |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n(1/k)}$$

donc par passage à l'événement contraire :

$$P(\overline{\Omega_k}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n(1/k)\right) = 0$$

par la question **Q38**, et donc :

$$P(\Omega_k) = 1.$$

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left(|S_m| \leq \dfrac{1}{k}\right) \supset \left(|S_m| \leq \dfrac{1}{k+1}\right)$, ce qui entraîne que la suite d'événements $(\Omega_k)_{k\geq 1}$ est décroissante donc par propriété de continuité décroissante :

$$P(A) = P\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \Omega_k\right) = \lim_{k\to+\infty} P(\Omega_k) = 1.$$

$$\boxed{P(A) = 1.}$$

Autrement dit, $(S_n)_n$ converge presque sûrement vers 0.
Ce résultat est un cas particulier de la *loi forte des grands nombres*.