Mines - Ponts - PSI - 2021 (Corrigé de Guy Barat)

Opérateurs à noyaux de type positif

I. Préliminaires

1. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X^\top \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et la « règle des dominos » assure que le produit $X^\top AX$ est bien défini et donne un résultat réel $(1,n) \times (n,n) \times (n,1) \to (1,1)$, $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ étant identifié à $\mathbb{R}$. Par ailleurs, la formule du produit matriciel donne

$$X^\top AX = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} X^\top|_{1,i} \times A|_{i,j} \times X|_{j,1} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i a_{i,j} x_j = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j.$$

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors, le théorème spectral indique que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$. Soient alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X \in E_\lambda(A) \subset \mathbb{R}^n$. Alors, $X^\top AX = X^\top(\lambda X) = \lambda X^\top X = \lambda \|X\|^2$. Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (à ne pas confondre avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}_+)$), alors $X^\top AX \geqslant 0$, donc $\lambda \geqslant 0$.

3. Soient $f\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,t) = \displaystyle\int_a^x f(u,t)\,\mathrm{d}u$. L'application partielle $t \longmapsto \varphi(x,t)$ est continue sur son domaine de définition $[c,d]$ par une application immédiate du théorème de continuité des intégrales à paramètre :

i) pour tout $t \in [c,d]$, la fonction $u \longmapsto f(u,t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $[a,x]$;

ii) pour tout $u \in [a,x] \subset [a,b]$, la fonction $t \longmapsto f(u,t)$ est continue sur $[c,d]$;

iii) f est une fonction continue sur le fermé-borné $[a,b] \times [c,d]$ donc bornée et dominée par la fonction constante $\|f\|_\infty$, intégrable sur le segment $[a,x]$.

4. Pour $x \in [a,b]$, on pose $\psi(x) = \displaystyle\int_c^d \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t$. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

i) pour tout $x \in [a,b]$, l'application $t \longmapsto \varphi(x,t)$ est continue sur le segment $[c,d]$ d'après la question précédente, donc intégrable sur ce segment ;

ii) pour tout $t \in [c,d]$, la fonction $x \longmapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ par continuité de $u \longmapsto f(u,t)$ (primitive d'une fonction continue) ;

iii) pour tout $x \in [a,b]$, l'application $t \longmapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux et dominée par la constante $\|f\|_\infty$, intégrable sur le segment $[c,d]$.

La fonction ψ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\psi'(x) = \displaystyle\int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

5. Notons que $\varphi(a,t) = 0$ pour tout $t \in [c,d]$, d'où $\psi(a) = \displaystyle\int_c^d \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t = 0$. En utilisant la question 4, il vient

$$\int_c^d \left[\int_a^x f(u,t)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t = \int_c^d \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t = \psi(x) = \psi(x) - \psi(a) = \int_a^x \psi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^x \left[\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u.$$

6. Notons $I = \displaystyle\int_a^b \left[\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$. Alors,

$$\begin{aligned}
I - S_n(f) &= \int_a^b \left[\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u - S_n(f) \overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \left[\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u - S_n(f) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \left[\sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u - S_n(f) \overset{(2)}{=} \sum_{0 \leqslant k,\ell < n} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u - S_n(f) \\
&\overset{(3)}{=} \sum_{0 \leqslant k,\ell < n} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \left[f(u,t) - f(x_k,u_\ell)\right]\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

par (1) : relation de Chasles, (2) : linéarité de l'intégrale et (3) : $\displaystyle\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta \mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = (\beta-\alpha)(\delta-\gamma)$. On majore maintenant la différence (en valeur absolue) en utilisant l'hypothèse $\mathcal{L}$, qui exprime que f est lipschitzienne.

$$\begin{aligned}
|I - S_n(f)| &\leqslant \sum_{0\leqslant k,\ell<n} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \big|f(u,t) - f(x_k,u_\ell)\big|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \overset{(\mathcal{L})}{\leqslant} M \sum_{0\leqslant k,\ell<n} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \big[(u-u_k) + (t-t_\ell)\big]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \\
&\leqslant M \sum_{0\leqslant k,\ell<n} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \left[\frac{b-a}{n} + \frac{d-c}{n}\right] \mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \overset{(3)}{\leqslant} M \sum_{0\leqslant k,\ell<n} \frac{b+d-a-c}{n} \times \frac{b-a}{n} \times \frac{d-c}{n} \\
&\leqslant \frac{M(b+d-a-b)(b-a)(d-c)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

II. Noyaux de type positif

Soit Ω un ensemble quelconque. Une application $K\colon \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}$ est un NTP (noyau de type positif) si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n) \in \Omega^n :\ \mathrm{Cov}_K(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) = \big(K(x_i,\, x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

Notons que l'hypothèse (i) donnée dans l'énoncé est redondante, puisque trivialement contenue dans (ii).

7. Soient $\big(H,\, \langle\cdot \mid \cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien réel et $K\colon H^2 \to \mathbb{R}$ donné par $K(x,y) = \langle x \mid y\rangle_H$. La matrice $\mathrm{Cov}_K(x_1,\, x_2, \ldots, x_n)$ est symétrique par symétrie du produit scalaire. Si $T = (t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, par bilinéarité de K, puis par sa positivité,

$$T^\top \mathrm{Cov}_K(x_1,\, x_2,\, \ldots, x_n) T \overset{(Q1)}{=} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} K(x_i,x_j) t_i t_j = K\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i, \sum_{j=1}^n t_j x_j\right) \geqslant 0.$$

8. Suposons qu'une application K définie sur Ω^2 vérifie la propriété $(\mathcal{R})$. Soient $\big(H,\, \langle\cdot \mid \cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien réel et $\varphi\colon \Omega \to H$ tels que $K(x,y) = \langle \varphi(x) \mid \varphi(y)\rangle_H$ pour tout $(x,y) \in \Omega^2$. Alors, $K = K_7 \circ \varphi$, où K_7 est l'application définie à la question 7. Le fait que K_7 soit un NTP entraîne immédiatement que c'est également le cas de K.

9. Soient $\Omega = \{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\}$ et $K\colon \Omega^2 \to \mathbb{R}$ un NTP. Par hypothèse, la matrice $\mathrm{Cov}_K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est symétrique positive, donc, d'après le théorème spectral et la question 2, il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et $(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tels que

$$\mathrm{Cov}_K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P^\top \operatorname{diag}(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_n) P = P^\top \Delta^2 P = (\Delta P)^\top \Delta P,$$

où $\Delta = \operatorname{diag}\big(\sqrt{\lambda_1},\, \sqrt{\lambda_2},\, \ldots,\, \sqrt{\lambda_n}\big)$. Considérons l'espace euclidien $H = \mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique et $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(x_i) = C_i(\Delta P)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ ($C_i(\Delta P)$ désignant la $i$ème colonne de ΔP). Alors,

$$\langle \varphi(x_i) \mid \varphi(x_j)\rangle = C_i(\Delta P)^\top C_j(\Delta P) = (\Delta P)^\top \Delta P|_{i,j} = \mathrm{Cov}_K(x_1, x_2, \ldots, x_n)|_{i,j} = K(x_i,\, x_j),$$

ce qui montre que K vérifie la propriété $(\mathcal{R})$. En d'autres termes (un peu hors programme), on a montré que toute matrice symétrique positive est une matrice de Gram.

10. Montrons que l'application définit un produit scalaire sur H.

i) L'application $(f,g) \longmapsto \langle f \mid g\rangle$ est *symétrique* par commutativité de la multiplication réelle.

ii) Elle est *bilinéaire* par linéarité de l'intégrale.

iii) Elle est *positive* : $\displaystyle\int_0^1 f'^2 \geqslant 0$.

iv) Elle est enfin *définie* : si $\displaystyle\int_0^1 f'^2 = 0$, alors, pour une subdivision $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ adaptée à f', on a $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'^2 = 0$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$. Ainsi, les restrictions $f_{]x_i,x_{i+1}[}$ sont constantes, donc f est en escalier, donc f est constante puisqu'elle est continue et enfin nulle car $f(0) = 0$.

11. On utilise l'indication. L'espace préhilibertien est bien sûr celui introduit à la question 10. La fonction K_x définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $K_x(y) = \min(x,y) = y\mathbb{1}_{[0,x]}(y) + x\mathbb{1}_{]x,1]}(y)$ est clairement continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux avec K_x non dérivable en x et $K_x' = \mathbb{1}_{[0,x[}$ sur $[0,1] \setminus \{x\}$. Alors,

$$\langle K_x \mid K_y \rangle = \int_0^1 K_x'(t) K_y'(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,x[}(t) \times \mathbb{1}_{[0,y[}(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,\min(x,y)[}(t) \, \mathrm{d}t = \min(x,y) = K(x,y).$$

III. Opérateurs à noyau

On note $I = [a,b]$ et $E = \mathcal{C}\big(I, \mathbb{R}\big)$, sur lequel on définit le produit scalaire $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_I fg$ et la norme associée $\|\cdot\|_2$ (norme de la *convergence en moyenne quadratique.* À $K \colon I^2 \to \mathbb{R}$ symétrique, on associe les applications partielles $K_x(t) = K(x,t) = K(t,x)$ et l'opérateur u_K défini par

$$\forall f \in E, \forall x \in I \colon u_K(f)(x) = \int_a^b K(x,t) f(t) \, \mathrm{d}t = \langle K_x \mid f \rangle.$$

12. Si $u_K = u_{K'}$, alors, pour tout $x \in I$, on a $\langle K_x - K_x' \mid f \rangle = \langle K_x \mid f \rangle - \langle K_x' \mid f \rangle = u_K(f)(x) - u_{K'}(f)(x) = 0$ pour tout $f \in E$. Ainsi, $K_x - K_x' \in E^\perp = \{0\}$, donc $K_x = K_x'$ pour tout x, soit $K = K'$.

13. La linéarité de u_K procède directement de celle de l'intégrale. Pour montrer que $u_K \in \mathcal{L}(E)$, il faut donc vérifier que, pour tout $f \in E$, $u_K(f) \in E$. Il est évident que $u_K(f)$ est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et il suffit donc de montrer que $u_K(f)$ est continue, ce qui se fait par application du théorème de continuité des intégrales à paramètre, dont les hypothèses sont vérifiées ci-dessous :

i) pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto K(x,t)f(t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur I par continuité de K et de f ;

ii) pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto K(x,t)f(t)$ est continue sur I par continuité de K ;

iii) la fonction $(x,t) \longmapsto K(x,t)f(t)$ est continue sur le fermé-borné I^2, donc majorée en valeur absolue par une constante C, trivialement intégrable sur le segment I.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\|u_K(f)\|_2^2 = \int_a^b \left[\int_a^b K(x,t) f(t) \, \mathrm{d}t \right]^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \|K_x\|_2^2 \, \|f\|_2^2 \, \mathrm{d}x = \|f\|_2^2 \iint_{[a,b]^2} K(x,t)^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t,$$

ce qui montre, en prenant la racine carrée de l'inégalité, que u_k est lipschitzienne, donc continue.

14. En utilisant le théorème de Fubini (question 5) et la symétrie de K, il vient

$$\langle u_K(f) \mid g \rangle = \int_a^b \left[\int_a^b K(x,t) f(t) \, \mathrm{d}t \right] g(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(t) \left[\int_a^b K(t,x) g(x) \, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t = \langle f \mid u_K(g) \rangle,$$

ce qui montre que u_K est autoadjoint.
L'orthogonalité des sous-espaces propres est connue uniquement en dimension finie. Deux solutions possibles :
1) redémontrer cette propriété en écrivant

$$\langle u_K(f_\lambda) \mid f_\mu \rangle = \begin{cases} \langle \lambda f_\lambda, f_\mu \rangle = \lambda \langle f_\lambda, f_\mu \rangle \\ \langle f_\lambda \mid u_K(f_\mu) \rangle = \mu \langle f_\lambda, f_\mu \rangle \end{cases} \qquad \therefore \qquad \langle f_\lambda, f_\mu \rangle = 0,$$

ou 2) noter que $P = \operatorname{Vect}(f_\lambda, f_\mu)$ est un plan de E stable par u_K, espace euclidien sur lequel u_K induit trivialement un endomorphisme auto-adjoint dont f_λ et f_μ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, donc orthogonaux.

15. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, formons la subdivision régulière $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n = b$, *i.e.* $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$. Notons $X = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})^\top$. Pour $f \in E$, notons à la `numpy` $f(X) = \big(f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{n-1})\big)^\top$. Alors,

$$\Lambda_n(K, f) = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1} K(x_i, x_j) f(x_i) f(x_j) \overset{(Q1)}{=} f(X)^\top \mathrm{Cov}_K\big(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\big) f(X) \geqslant 0 \quad \text{car } K \text{ est un NTP} \qquad \therefore$$

$$\langle u_K(f) \mid f \rangle = \int_a^b \left[\int_a^b K(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t\right] f(x)\,\mathrm{d}x = \iint_{[a,b]^2} K(x,t) f(t) f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \overset{(Q6)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)^2}{n^2} \Lambda_n(K, f) \geqslant 0.$$

Si $u_K(f) = \lambda f$ avec $f \neq 0_E$, alors $\langle u_K(f) \mid f \rangle = \langle \lambda f \mid f \rangle = \lambda \left\|f\right\|_2$, d'où $\lambda \geqslant 0$.

16. On revient au cas $I = [0,1]$ et $K(x,t) = \min(x,t)$. On a montré à la question 11 que K vérifie la propriété $(\mathcal{R})$, ce qui entraîne, grâce à la question 8, que K est un NTP (il n'était pas explicitement demandé de le vérifier). Soient f une fonction continue sur $[0,1]$ et $g = u_K(f)$. Alors,

$$g(x) = u_K(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + x \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \therefore$$

$$g'(x) = x f(x) + \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t - x f(x) = \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \& \qquad g''(x) = -f(x),$$

l'expression de g montrant que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et celle de g' que g est de classe $\mathcal{C}^2$. Il est par ailleurs immédiat au vu des expressions explicites de g et de g' que $g(0) = g'(1) = 0$. Ainsi, g est solution du problème $(\mathcal{P})$. Si g_1 et g_2 sont solutions de $(\mathcal{P})$, alors $h = g_1 - g_2$ vérifie par différence $h'' = 0_E$, ce qui entraîne que h est une fonction affine et $h(0) = h'(1) = 0$. En reportant dans $h(x) = ax + b = h'(1)x + h(0)$, il vient $h = 0_E$, d'où l'unicité de la solution.

17. D'après la question précédente, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, $u_K(f) = \lambda f$ si, et seulement si, $\begin{cases} \lambda f'' + f = 0 \\ \lambda f(0) = \lambda f'(1) = 0. \end{cases}$
Le cas $\lambda < 0$ est exclu par la question 15 (on pourrait aussi procéder directement et vérifier que seule la fonction nulle vérifie l'équation différentielle avec les conditions aux bornes). Pour $\lambda = 0$, il vient $f = 0_E$, donc 0 n'est pas valeur propre de u_K. Enfin, pour $\lambda > 0$, les solutions de l'équation différentielle $\lambda f'' + f = 0$ sont les fonctions de la forme $f(x) = a\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + b\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$. La condition $f(0) = 0$ donne $a = 0$, puis la condition $f'(1) = 0$ donne $\dfrac{b}{\sqrt{\lambda}}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$. Ainsi, $\lambda > 0$ est valeur propre de u_K si, et seulement si, $\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$, donc pour $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, soit la suite spectrale décroissante $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par $\lambda_k = \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-2}$. D'après le calcul précédent,

$$E_{\lambda_k}(u_K) = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda_k}}\right)\right) = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x\right]\right) = \mathrm{Vect}(\mathfrak{e}_k).$$

La formule $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$ et le fait que $x \mapsto \cos\big((\pi + 2k\pi)x\big)$ soit 1-périodique montrent que $\displaystyle\int_0^1 \mathfrak{e}_k^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.
Ainsi, $e_k = \sqrt{2}\,\mathfrak{e}_k$ est un vecteur directeur unitaire de la droite propre associée à la valeur propre λ_k.

Ainsi, d'après la question 14, $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthonormale. On note F_n le s.e.v. de E qu'elle engendre.

18. La somme admise $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(k + \frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{\pi^4}{6}$ s'obtient facilement à partir de $\zeta(4) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ en séparant termes pairs et impairs. Cette dernière somme se calcule classiquement en utilisant les séries de Fourier (formule de Parseval appliquée à la fonction 2π-périodique coïncidant avec la valeur absolue sur $[-\pi, \pi]$), mais tout cela est hors programme. Pour revenir au sujet, on calcule séparément l'intégrale double et la somme de la série pour constater que leurs valeurs sont égales :

$$\iint_{[0,1]^2} K(x,t)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left[\int_0^1 \min(x,t)^2 \,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\int_0^x t^2 \,\mathrm{d}t + \int_x^1 x^2 \,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + x^2(1-x)\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{2x^3}{3}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \qquad \&$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 \overset{(Q17)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-4} = \frac{1}{\pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{6}.$$

19. Comme F_n est de dimension finie, on a $E = F_n \oplus F_n^{\perp}$ et l'on peut définir p_n le projecteur orthogonal sur F_n. En utilisant l'expression d'une projection orthogonale sur une BON, il vient

$$p_n(K_x) = \sum_{k=0}^{n} \langle K_x \mid e_k\rangle \, e_k = \sum_{k=0}^{n} u_K(K_x)\, e_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k(x)\, e_k.$$

Le théorème de Pythagore, puis l'intégration par rapport à x de l'égalité, donnent

$$\|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 = \|K_x\|_2^2 - \|p_n(K_x)\|_2^2 = \int_0^1 K(x,t)^2 \,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 e_k^2(x) \qquad \therefore$$

$$\int_0^1 \|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 \,\mathrm{d}x = \iint_{[0,1]^2} K(x,t) \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 \int_0^1 e_k^2(x)\,\mathrm{d}x = \iint_{[0,1]^2} K(x,t) \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 \xrightarrow[n\to\infty]{(Q18)} 0.$$

20. L'expression de $p_n(K_x)$ établie à la question 19, puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donnent :

$$u_K(f) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f\rangle e_k = \langle K_x \mid f\rangle - \big\langle p_n(K_x) \mid f\big\rangle = \big\langle K_x - p_n(K_x) \mid f\big\rangle \qquad \therefore$$

$$\left\| u_K(f) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f\rangle e_k \right\|_2 \leqslant \|K_x - p_n(K_x)\|_2 \times \|f\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{(Q19)} 0.$$

On dit que $(e_k)_{k\geqslant 0}$ est une *base hilbertienne* de E.

21. Le résultat n'est pas immédiat car, sur un segment, la convergence uniforme entraîne la convergence en moyenne quadratique, mais la réciproque est fausse. Revenons à l'expression du terme général de la série :

$$\lambda_k \langle e_k \mid f\rangle\, e_k(x) = \lambda_k \int_0^1 \sqrt{2} \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) x\right] f(x)\,\mathrm{d}x \times \sqrt{2} \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) x\right] \qquad \therefore$$

$$\big|\lambda_k \langle e_k \mid f\rangle\, e_k(x)\big| \leqslant 2\lambda_k \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 2\,\|f\|_1 \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-2} \leqslant \frac{2\,\|f\|_1}{\pi^2} \times \frac{1}{k^2}.$$

Ainsi, la série de fonctions de terme général $\lambda_k \langle e_k \mid f\rangle\, e_k$ converge normalement par comparaison avec la série de Riemann d'exposant 2, donc uniformément, sur $[0,1]$. Notons S sa somme. La convergence uniforme sur le segment $[0,1]$ permet de passer à la limite sous l'intégrale et l'on a

$$0 = \lim_{n\to\infty} \left\| u_K(f) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f\rangle\, e_k \right\|_2 = \|u_K(f) - S\|_2 \qquad \therefore \qquad S = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \langle e_k \mid f\rangle\, e_k = u_K(f).$$

22. Comme suggéré, posons $K'(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k(x) e_k(y)$. La série converge normalement sur $[0,1]^2$, donc simplement, puisque $\big|\lambda_k e_k(x) e_k(y)\big| \leqslant 2\lambda_k$ et que $\sum \lambda_k$ converge (utilisé à la question 21). Pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$, on a

$$u_{K'}(f)(x) = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k(x) e_k \;\middle|\; f \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \langle e_k \mid f\rangle\, e_k(x) = u_K(f)(x),$$

la permutation série-intégrale de l'égalité centrale étant assurée par la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général $y \longmapsto \lambda_k e_k(x) e_k(y) f(y)$. La question 12 permet de conclure : $K = K'$.

23. Comme $\left\|\lambda_k e_k^2\right\|_\infty = 2\lambda_k$, la série de fonctions de terme général $\lambda_k e_k^2$ converge normalement, donc uniformément sur le segment $[0,1]$ et l'on a, par interversion série-intégrale,

$$\int_0^1 K(x,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k(x)^2\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \int_0^1 e_k^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left\|e_k\right\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \qquad \therefore$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(k+\frac{1}{2}\right)^{-2} = \pi^2 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \pi^2 \int_0^1 K(x,x)\,\mathrm{d}x = \pi^2 \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}.$$