X-ENS 2020 - Corrigé

PARTIE I

1. Pour tous $A, B \in \mathrm{Sym}^+(p)$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$, $aA + bB \in \mathrm{Sym}^+(p)$ car :
   — $(aA+bB)^T = aA^T + bB^T = aA + bB$ (par linéarité de la transposition et car $A, B \in \mathrm{Sym}^+(p)$)
   — pour tout $u \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,
   $$u^T(aA+bB)u = au^TAu + bu^TBu \geq 0$$
   comme produit et somme de termes positifs.
   Rq : On peut facilement généraliser ce résultat par récurrence à une combinaison linéaire à coefficients positifs de matrices de $\mathrm{Sym}^+(p)$, ce qu'on utilisera dans plusieurs questions.
2. Soit $v \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $A = vv^T$. On a :
   — $A^T = (vv^T)^T = (v^T)^T v^T = vv^T = A$
   — pour tout $u \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,
   $$u^TAu = u^Tvv^Tu = \langle u, v\rangle \langle v, u\rangle = (\langle u, v\rangle)^2 \geq 0$$
   où on a noté $\langle ., .\rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et on a utilisé la symétrie du produit scalaire.
   On a donc bien $A \in \mathrm{Sym}^+(p)$.
3. (a) Pour tous $u, v \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$,
   $$\begin{aligned}(uu^T)_{ij} &= u_iu_j\\ (vv^T)_{ij} &= v_iv_j\\ ((uu^T)\odot(vv^T))_{i,j} &= (uu^T)_{ij}(vv^T)_{ij} = u_iu_jv_iv_j\\ (u\odot v)_i &= u_iv_i\\ ((u\odot v)(u\odot v)^T)_{ij} &= (u\odot v)_i(u\odot v)_j = u_iv_iu_jv_j\end{aligned}$$
   On a donc bien $((uu^T)\odot(vv^T))_{i,j} = ((u\odot v)(u\odot v)^T)_{ij}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, donc $(uu^T)\odot(vv^T) = (u\odot v)(u\odot v)^T$.

   (b) • Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on a $u_k^TAu_k \geq 0$ (car $A \in \mathrm{Sym}^+(p)$) et
   $$u_k^TAu_k = u_k^T(\lambda_ku_k) = \lambda_ku_k^Tu_k = \lambda_k\underbrace{\langle u_k, u_k\rangle}_{=1} = \lambda_k,$$
   donc on a bien $\lambda_k \geq 0$.
   • La matrice par blocs $P = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_p\end{pmatrix}$ (où les vecteurs u_i sont écrits en colonne) est orthogonale (car la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^p$) et, d'après les propriétés des matrices de changement de base, on a $A = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)P^T$ donc par produit matriciel par blocs,
   $$A = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)P^T = \begin{pmatrix}\lambda_1u_1 & \cdots & \lambda_pu_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1^T\\ \vdots\\ u_p^T\end{pmatrix} = \sum_{k=1}^p \lambda_ku_ku_k^T.$$

   (c) • Remarquons déjà que $\odot$ est un opérateur symétrique ($A\odot B = B\odot A$) et linéaire à gauche ($(\lambda A+B)\odot C = \lambda A\odot C + B\odot C$), donc bilinéaire.
   • Soient $A, B \in \mathrm{Sym}^+(p)$.
   D'après la question précédente, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}^{2p}$, $(u_1, \dots, u_p)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^p$ formée de vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propre $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et $(v_1, \dots, v_p)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^p$ formée de vecteurs propres de B associés respectivement aux valeurs propre $\beta_1, \dots, \beta_p$ telles que :
   $$A = \sum_{k=1}^p \lambda_ku_ku_k^T \quad \text{et} \quad B = \sum_{k=1}^p \beta_kv_kv_k^T.$$
   Par bilinéarité de $\odot$, on a alors
   $$\begin{aligned}A\odot B &= \left(\sum_{k=1}^p \lambda_ku_ku_k^T\right)\odot\left(\sum_{j=1}^p \beta_jv_jv_j^T\right)\\ &= \sum_{k=1}^p\sum_{j=1}^p \lambda_k\beta_j(u_ku_k^T)\odot(v_jv_j^T)\\ &= \sum_{k=1}^p\sum_{j=1}^p \lambda_k\beta_j(u_k\odot v_j)(u_k\odot v_j)^T \quad \text{(d'après 3a)}\\ &= \sum_{k=1}^p\sum_{j=1}^p \underbrace{\lambda_k\beta_j}_{\geq 0 \text{ d'après 3b}}\ \underbrace{(u_k\odot v_j)(u_k\odot v_j)^T}_{\in\mathrm{Sym}^+(p) \text{ d'après 2}} \in \mathrm{Sym}^+(p)\end{aligned}$$
   comme combinaison linéaire à coefficients positifs de matrices de $\mathrm{Sym}^+(p)$ (cf. 1)

Partie II

4. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
• Par récurrence immédiate, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$,

$$(A^{(k)})_{ij} = (A_{ij})^k.$$

• Par définition de $P[A]$, avec les notations prises pour P, on a, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$,

$$(P[A])_{ij} = P(A_{ij}) = \sum_{k=0}^{n} a_k (A_{ij})^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (A^{(k)})_{ij} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^{(k)}\right)_{ij},$$

donc on a bien $P[A] = \sum_{k=0}^{n} a_k A^{(k)}$.

(b) Soit $A \in \mathrm{Sym}^+(p)$.
• Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{(k)} \in \mathrm{Sym}^+(p)$ (P_k).
Initialisation : Pour $k=0$, on a $A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, donc $A^{(0)}$ est symétrique et pour tout $u = (u_1, \cdots, u_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$u^T A^{(0)} u = u^T \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} u_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} u_k \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{p} u_k\right) u^T \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{p} u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{p} u_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{p} u_k\right)^2 \geq 0,$$

donc $A^{(0)} \in \mathrm{Sym}^+(p)$. On a bien P_0.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons P_k vérifiée.
Alors $A^{(k+1)} = \underbrace{A^{(k)}}_{\in \mathrm{Sym}^+(p) \text{ d'après } P_k} \odot A \in \mathrm{Sym}^+(p)$ d'après la question 3c. On a donc bien P_{k+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{(k)} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.
• Comme, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k \geq 0$ (par hypothèse sur P), $P[A] = \sum_{k=0}^{n} a_k A^{(k)} \in \mathrm{Sym}^+(p)$ comme combinaison linéaire à coefficients positifs de matrices de $\mathrm{Sym}^+(p)$.

5. Soit $A \in \mathrm{Sym}^+(p)$.
(a) Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, par définition de $P_n[A]$, on a

$$(P_n[A])_{ij} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(A_{ij})^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\to} \exp(A_{ij})$$

comme limite de la suite des sommes partielles de la série exponentielle de paramètre A_{ij}.
(b) • Comme A est symétrique, on a, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$,

$$(\exp[A])_{ij} = \exp(A_{ij}) = \exp(A_{ji}) = (\exp[A])_{ji},$$

donc $\exp[A]$ est une matrice symétrique.
• D'après la question précédente, on a $\exp[A] = \lim_{n\to+\infty} P_n[A]$ (convergence coordonnée par coordonnée).
De plus, pour tout $u \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, l'application $\varphi_u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto u^T M u$ est linéaire en dimension finie, donc continue.
On a donc, pour tout $u \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$u^T \exp[A] u = \varphi_u(\exp[A]) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_u(P_n[A]) = \lim_{n\to+\infty} u^T P_n[A] u.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n[A] \in \mathrm{Sym}^+(p)$ (d'après la question 4b avec $A \in \mathrm{Sym}^+(p)$), donc $u^T P_n[A] u \geq 0$, donc $u^T \exp[A] u \geq 0$ comme limite d'une suite de nombres positifs.
(c) Soit $u \in \mathbb{R}^p$.
D'après la question précédente, $\exp[A] \in \mathrm{Sym}^+(p)$.
D'après la question 2, $uu^T \in \mathrm{Sym}^+(p)$.
D'où, d'après la question 3c, $\exp[A] \odot (uu^T) \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

6. (a) • Par symétrie du produit scalaire, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$,

$$A_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle = \langle x_j, x_i \rangle = A_{ji},$$

donc A est une matrice symétrique.

- Pour tout $u = (u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned}
u^T A u &= u^T \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} \langle x_1, x_j \rangle u_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} \langle x_p, x_j \rangle u_j \end{pmatrix} \\
&= u^T \begin{pmatrix} \left\langle x_1, \sum_{j=1}^{p} u_j x_j \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle x_p, \sum_{j=1}^{p} u_j x_j \right\rangle \end{pmatrix} \quad \text{(par linéarité à droite du produit scalaire)} \\
&= \sum_{i=1}^{p} u_i \left\langle x_i, \sum_{j=1}^{p} u_j x_j \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{p} u_i x_i, \sum_{j=1}^{p} u_j x_j \right\rangle \quad \text{(par linéarité à gauche du produit scalaire)} \\
&= \left| \sum_{i=1}^{p} u_i x_i \right|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

- On a donc bien $A = (\langle x_i, x_j \rangle)_{(i,j) \in [\![1,p]\!]^2} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

(b) Avec les notations de l'énoncé, on a, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$,

$$\begin{aligned}
(\exp[A] \odot (uu^T))_{ij} = (\exp[A])_{ij} (uu^T)_{ij} &= \exp(A_{ij}) u_i u_j \\
&= \exp(\langle x_i, x_j \rangle) \exp\left(-\frac{|x_i|^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{|x_j|^2}{2}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{|x_i|^2 + |x_j|^2 - 2\langle x_i, x_j \rangle}{2}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

(c) Soient $\lambda > 0$.
D'après le début de la question 6 et la question 5c, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{R}^d)^p$,

$$\exp[A] \odot (uu^T) = \left(\exp\left(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2}\right) \right)_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathrm{Sym}^+(p).$$

Soit alors, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $y_i = x_i / \sqrt{\lambda}$.
Alors, en posant $B = (\langle y_i, y_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq p}$ et $v = \left(\exp\left(-\frac{|y_1|^2}{2}\right), \dots, \exp\left(-\frac{|y_p|^2}{2}\right), \right)$, on obtient que

$$K = \left(\exp\left(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2\lambda}\right) \right)_{1 \leq i,j \leq p} = \left(\exp\left(-\frac{|y_i - y_j|^2}{2}\right) \right)_{1 \leq i,j \leq p} = \exp[B] \odot (vv^T) \in \mathrm{Sym}^+(p).$$

PARTIE III

7. Soit $(f,g) \in \mathcal{E}^2$.

- Par définition de $\mathcal{E}$, il existe $(a, A, b, B) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$ tels que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |f(y)| \leq A \exp(-y^2/a) \quad \text{et} \quad |g(y)| \leq B \exp(-y^2/b).$$

Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|(fg)(y)| = |f(y)|.|g(y)| &\leq A \underbrace{\exp(-y^2/a)}_{\leq 1} .B \exp(-y^2/b) \\
&\leq AB \exp(-y^2/b).
\end{aligned}$$

- $y \mapsto \exp(-y^2/b)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\dfrac{\exp(-y^2/b)}{\exp(-y)} = \exp\underbrace{\left(y - \dfrac{y^2}{b}\right)}_{\to -\infty} \underset{y \to +\infty}{\to} 0$, donc $\exp(-y^2/b) = \underset{y \to +\infty}{o}(\exp(-y))$.

Or $y \mapsto e^{-y}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction usuelle), donc par comparaison, $y \mapsto \exp(-y^2/b)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Comme de plus $y \mapsto \exp(-y^2/b)$ est paire, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.
• fg est continue sur $\mathbb{R}$ (comme produit de fonctions de $\mathcal{E}$ donc continues).
Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|(fg)(y)| \leq AB\exp(-y^2/b)$. Or $y \mapsto AB\exp(-y^2/b)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (cf. point précédent), donc par comparaison, fg est intégrable sur $\mathbb{R}$.

8. Pour tout $(f,g) \in \mathcal{E}^2$, fg est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $(f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(y)dy$ est bien défini.

(a) • Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^2(y) \geq 0$.
D'où, par positivité de l'intégrale convergente ("$-\infty \leq +\infty$"), on a :

$$(f|f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(y)dy \geq 0.$$

• Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $(f|f) = 0$.
Comme f^2 est continue et positive sur $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(y)dy$ converge et vaut 0 et "$-\infty \neq +\infty$", on a $f^2(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, donc $f(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
• Le caractère bilinéaire symétrique étant évident, $(.|.)$ définit donc un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.
On sera potentiellement amené à utiliser ce résultat par la suite.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\tau_x(\gamma_\lambda)(y) = \gamma_\lambda(y-x) = \exp(-(y-x)^2/\lambda).$$

$\tau_x(\gamma_\lambda)$ est donc continue sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles.
De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\tau_x(\gamma_\lambda)(y) = \exp(-(y-x)^2/\lambda) &= \exp\left(-\frac{y^2-2xy+x^2}{\lambda}\right)\\ &= \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda}\right)\exp\left(-\frac{y^2-4xy+2x^2}{2\lambda}\right).\end{aligned}$$

Or $h_x : y \mapsto y^2 - 4xy + 2x^2$ est un trinôme en y, qui atteint son minimum en $y = 2x$, et $h_x(2x) = 4x^2$, donc par décroissance de la fonction $y \mapsto \exp(-y)$ sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\exp\left(-\frac{y^2-4xy+2x^2}{2\lambda}\right) = \exp\left(-\frac{h_x(y)}{2\lambda}\right) \leq \exp\left(-\frac{2x^2}{\lambda}\right) \leq 1,$$

donc, en posant $A = 1 > 0$ et $a = 2\lambda > 0$, on a, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\tau_x(\gamma_\lambda)(y) = \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda}\right)\exp\left(-\frac{y^2-4xy+2x^2}{2\lambda}\right) \leq A\exp(-y^2/a).$$

• On a donc bien $\tau_x(\gamma_\lambda) \in \mathcal{E}$.

9. (a) Soit $a > 0$.
• $y \mapsto \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) = \tau_x(\gamma_\lambda)(y) \in \mathcal{E}$ et $y \mapsto \exp(-y^2/a) \in \mathcal{E}$ (car continue sur $\mathbb{R}$, et en prenant $A = 1$), donc, d'après la question 7, $y \mapsto \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)\exp\left(-\frac{y^2}{a}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
En particulier, $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)\exp\left(-\frac{y^2}{a}\right)dy$ converge.
• Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{(y-x)^2}{\lambda} + \frac{y^2}{a} = \frac{a(y-x)^2+\lambda y^2}{a\lambda} = \frac{(a+\lambda)y^2 - 2ax + ax^2}{a\lambda}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 + \frac{x^2}{a+\lambda} &= \frac{1}{a\lambda(a+\lambda)}((a+\lambda)y - ax)^2 + \frac{a\lambda x^2}{a\lambda(a+\lambda)}\\ &= \frac{(a+\lambda)^2y^2 - 2a(a+\lambda)x + a^2x^2 + a\lambda x^2}{a\lambda(a+\lambda)}\\ &= \frac{(a+\lambda)^2y^2 - 2a(a+\lambda)x + a(a+\lambda)x^2}{a\lambda(a+\lambda)}\\ &= \frac{(a+\lambda)y^2 - 2ax + ax^2}{a\lambda},\end{aligned}$$

donc on a bien

$$\frac{(y-x)^2}{\lambda} + \frac{y^2}{a} = \frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 + \frac{x^2}{a+\lambda}.$$

• Par suite, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)\exp\left(-\frac{y^2}{a}\right)dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{(y-x)^2}{\lambda}+\frac{y^2}{a}\right)\right)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y-\frac{ax}{a+\lambda}\right)^2+\frac{x^2}{a+\lambda}\right)\right)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y-\frac{ax}{a+\lambda}\right)^2\right)\exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right)dy \\ &= \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y-\frac{ax}{a+\lambda}\right)^2\right)dy.\end{aligned}$$

Posons le changement de variable $u = y - \dfrac{ax}{a+\lambda}$.
Ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissant et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On a $du = dy$.
De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y-\frac{ax}{a+\lambda}\right)^2\right)dy$ converge, donc par changement de variable, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}u^2\right)du$ converge et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)\exp\left(-\frac{y^2}{a}\right)dy &= \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y-\frac{ax}{a+\lambda}\right)^2\right)dy \\ &= \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}u^2\right)du.\end{aligned}$$

En posant $c = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}u^2\right)du$, constante par rapport à x, on a bien la propriété demandée.

(b) Soit $g \in \mathcal{E}$.
• Comme, pour tout $xin\mathbb{R}$, $g \in \mathcal{E}$ et $\tau_x(\gamma_\lambda) \in \mathcal{E}$, $C(g)(x) = (\tau_x(\gamma_\lambda)|g)$ est bien définie, donc $C(g)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
• Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$C(g)(x) = (\tau_x(\gamma_\lambda)|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)g(y)dy.$$

• Posons $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \exp\left(-\dfrac{(y-x)^2}{\lambda}\right)g(y)$.
— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x,y)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$.
— Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
— Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &= \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)|g(y)| \\ &\leq \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda}\right)|g(y)| \quad \text{(majoration prouvée en 8b)} \\ &= \varphi(y)\end{aligned}$$

où φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux éléments de $\mathcal{E}$ (d'après 7).
D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, $x \mapsto C(g)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$ est continue sur $\mathbb{R}$.
• Comme $g \in \mathcal{E}$, il existe $(a,A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|g(y)| \leq A\exp(-y^2/a)$.
Par l'inégalité triangulaire généralisée et par positivité de l'intégrale, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|C(g)(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)g(y)dy\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)|g(y)|dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)A\exp(-y^2/a)dy \\ &= A\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)\exp(-y^2/a)dy \\ &\leq Ac\exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right)\end{aligned}$$

où c a été introduit à la question 9a, indépendant de x.
Par suite, en prenant $B = Ac > 0$ et $b = a+\lambda > 0$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|C(g)(x)| \leq B\exp(-x^2/b).$$

• On a donc bien $C(g) \in \mathcal{E}$.

(c) Pour tout $g, h \in \mathcal{E}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}C(\alpha g + h)(x) &= (\tau_x(\gamma_\lambda)|\alpha g + h)\\ &= \alpha(\tau_x(\gamma_\lambda)|g) + (\tau_x(\gamma_\lambda)|h) \quad \text{(par linéarité à droite du produit scalaire, cf question 8a)}\\ &= \alpha C(g)(x) + C(h)(x),\end{aligned}$$

donc $C(\alpha g + h) = \alpha C(g) + C(h)$, donc C est linéaire.
Comme de plus $C : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ d'après la question précédente, C est bien un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

PARTIE IV

10. Par définition, $\mathcal{G}$ est l'ensemble des combinaison linéaires des éléments de la famille $(\tau_x(\gamma_\lambda))_{x\in\mathbb{R}}$, donc

$$\mathcal{G} = \mathrm{Vect}\left((\tau_x(\gamma_\lambda))_{x\in\mathbb{R}}\right)$$

est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ qui contient toutes les fonctions $\tau_x(\gamma_\lambda)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

11. (a) Pour tout $(x, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\tau_x(\gamma_\lambda)|\tau_{x'}(\gamma_\lambda)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)\exp\left(-\frac{(y-x')^2}{\lambda}\right)dy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2 + (y-x')^2}{\lambda}\right)dy.\end{aligned}$$

Or, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{(y-x)^2 + (y-x')^2}{\lambda} = \frac{2y^2 + x^2 + x'^2 - 2xy - 2x'y}{\lambda}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{2}{\lambda}(y - (x+x')/2)^2 + \frac{1}{2\lambda}(x'-x)^2 &= \frac{1}{2\lambda}\left((2y - (x+x'))^2 + (x'-x)^2\right)\\ &= \frac{1}{2\lambda}(4y^2 + x^2 + x'^2 + 2xx' - 4yx - 4yx' + x'^2 + x^2 - 2xx')\\ &= \frac{1}{2\lambda}(4y^2 + 2x^2 + 2x'^2 - 4yx - 4yx')\\ &= \frac{2y^2 + x^2 + x'^2 - 2xy - 2x'y}{\lambda},\end{aligned}$$

donc

$$\frac{(y-x)^2 + (y-x')^2}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}(y - (x+x')/2)^2 + \frac{1}{2\lambda}(x'-x)^2$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}(\tau_x(\gamma_\lambda)|\tau_{x'}(\gamma_\lambda)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2 + (y-x')^2}{\lambda}\right)dy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{\lambda}(y - (x+x')/2)^2 - \frac{1}{2\lambda}(x'-x)^2\right)dy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{\lambda}(y - (x+x')/2)^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2\lambda}(x'-x)^2\right)dy\\ &= \exp\left(-\frac{1}{2\lambda}(x'-x)^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{\lambda}(y - (x+x')/2)^2\right)dy.\end{aligned}$$

En posant le changement de variable $u = y - (x+x')/2$, on obtient alors, comme dans la question 9a,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{\lambda}(y - (x+x')/2)^2\right)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{\lambda}u^2\right)dy = c_\lambda,$$

constante indépendante de x et x'.
Comme de plus on a

$$\exp\left(-\frac{1}{2\lambda}(x'-x)^2\right) = \exp\left(-\frac{1}{2\lambda}(x-x')^2\right) = \gamma_{2\lambda}(x-x'),$$

on a bien montré l'existence d'une constante c_λ indépendante de x et x' telle que pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$,

$$(\tau_x(\gamma_\lambda)|\tau_{x'}(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x-x').$$

(b) • Soit $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout $x' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} C(\tau_x(\gamma_\lambda))(x') &= (\tau_{x'}(\gamma_\lambda)|\tau_x(\gamma_\lambda)) \quad \text{(par définition de } C\text{)} \\ &= c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x'-x) \quad \text{(d'après la question précédente, en inversant les rôles de } x \text{ et } x'\text{)} \\ &= c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})(x'), \end{aligned}$$

donc on a bien $C(\tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})$.

• Comme $(\tau_x(\gamma_\lambda))_{x\in\mathbb{R}}$ est une famille génératrice de $\mathcal{G}$ et comme C est linéaire, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = C(\mathcal{G}) &= \mathrm{Vect}\left((C(\tau_x(\gamma_\lambda)))_{x\in\mathbb{R}}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left((\tau_x(\gamma_{2\lambda}))_{x\in\mathbb{R}}\right) \quad \text{(d'après le premier point de cette question)} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) | n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [\![1,n]\!] (x_i,\alpha_i) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \right\} \quad \text{(par définition d'un Vect).} \end{aligned}$$

12. (a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que, "si $(x_i)_{1\le i\le n}$ est une famille de n réels deux à deux distincts, alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$ est nulle si et seulement si $\alpha_i = 0$ pour tout $1 \le i \le n$" (P_n).
Initialisation : pour $n = 1$, si $\alpha_1 \tau_{x_1}(\gamma_{2\lambda}) = 0$, alors, en particulier, pour $y = x_1$, on a

$$0 = \alpha_1 \tau_{x_1}(\gamma_{2\lambda}) = \alpha_1 \exp(0) = \alpha_1.$$

On a donc bien P_1.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons P_n vérifiée.
Soit alors $(x_i)_{1\le i\le n+1}$ est une famille de $n+1$ réels deux à deux distincts.
Supposons que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0$. On a alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \exp\left(-\frac{(y-x_i)^2}{2\lambda}\right) = 0.$$

Suppsons, quitte à renommer les variables, que la famille (x_i) est classée par ordre croissant.
Alors, en multipliant l'égalité précédente par $\exp\left(\frac{(y-x_{n+1})^2}{2\lambda}\right)$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \exp\left(\frac{(y-x_{n+1})^2 - (y-x_i)^2}{2\lambda}\right) = 0,$$

ie

$$\alpha_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp\left(\frac{2y(x_i - x_{n+1}) + x_{n+1}^2 - x_i^2}{2\lambda}\right) = 0.$$

Comme $x_i - x_{n+1} < 0$ (car les x_i sont deux à deux distincts et classés par ordre croissant), on a

$$\lim_{y\to+\infty} \exp\left(\frac{2y(x_i - x_{n+1}) + x_{n+1}^2 - x_i^2}{2\lambda}\right) = 0,$$

donc, en passant à la limite (et comme la somme est finie), on obtient, par unicité de la limite,

$$\alpha_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \times 0 = 0, \quad \text{donc} \quad \alpha_{n+1} = 0.$$

On a alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0$, avec les x_i deux à deux distincts, donc, d'après P_n, $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
On a donc bien $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![1,n+1]\!]$, et on a donc bien établi P_{n+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, la propriété demandée.

(b) • La famille $(\tau_x(\gamma_{2\lambda}))_{x\in\mathbb{R}}$ est donc libre (car toute sous-famille finie est libre) et génératrice de $\mathcal{H}$, donc c'est une base de $\mathcal{H}$.
• De même qu'à la question précédente (en remplaçant 2λ par λ), on peut montrer que toute sous-famille finie de $(\tau_x(\gamma_\lambda))_{x\in\mathbb{R}}$ est libre, et donc que la famille $(\tau_x(\gamma_\lambda))_{x\in\mathbb{R}}$ est libre.
De plus, elle est génératrice de $\mathcal{G}$, donc c'est une base de $\mathcal{G}$.
• Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $C(\tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})$, avec $c_\lambda \ne 0$, C transforme une base de $\mathcal{G}$ en une base de $\mathcal{H}$, donc réalise une bijection de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$.
• Ceci assure l'existence d'une unique application linéaire $D : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ telle que $D \circ C(g) = g$ pour tout $g \in \mathcal{G}$ et $C \circ D(h) = h$ pour tout $h \in \mathcal{H}$ *et on a* $D = C^{-1}$.

Rq : On avait déjà le caractère surjectif de C par définition de $\mathcal{H} = C(\mathcal{G})$.
On aurait alors pu montrer le carctère injectif en écrivant : Soit $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda) \in \mathrm{Ker} C$, où les x_i sont deux à deux distincts (quitte à regrouper deux termes de la somme dépendnat du même x_i).
Alors $C(g) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0$, donc $\alpha_i = 0$ pour tout $i[\![1, n]\!]$, donc $g = 0$.
Il ne reste plus alors qu'à conclure de la même façon, car on a alors prouvé que $C : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ est bijective.

(c) Pour tout $h \in \mathcal{H}$, $h = (C \circ D)(h) = C(D(h))$, donc, par définition de C, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = C(D(h))(x) = (\tau_x(\gamma_\lambda)|D(h)).$$

13. (a) Remarquons que, pour tout $h \in \mathcal{H}$, $D(h) \in \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ (où la dernière inclusion vient du fait que $\mathcal{G}$ est engendré par des éléments de $\mathcal{E}$).
• Pour tout $(h_1, h_2, h_3) \in \mathcal{H}^3$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\alpha h_1 + h_2 | h_3)_{\mathcal{H}} &= c_\lambda (D(\alpha h_1 + h_2)|D(h_3)) \\ &= c_\lambda(\alpha D(h_1) + D(h_2)|D(h_3)) \quad \text{(par linéarité de } D) \\ &= \alpha c_\lambda (D(h_1)|D(h_3)) + c_\lambda(D(h_1)|D(h_3)) \\ &\qquad \text{(par linéarité à gauche de } (.|.)\text{, qui est un produit scalaire d'après 8a)} \\ &= \alpha (h_1|h_3)_{\mathcal{H}} + (h_2|h_3)_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

donc $(.|.)_{\mathcal{H}}$ est linéaire à gauche.
• $(.|.)_{\mathcal{H}}$ est symétrique par symétrie de $(.|.)$.
• $(.|.)_{\mathcal{H}}$ est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.
• Pour tout $h \in \mathcal{H}$, $(h|h)_{\mathcal{H}} = \underbrace{c_\lambda}_{>0} \underbrace{(D(h)|D(h))}_{\geq 0} \geq 0$, avec égalité si et seulement si $(D(h)|D(h)) = 0 \Leftrightarrow D(h) = 0$ (car $(.|.)$ est un produit scalaire), donc, comme D est une bijection, si et seulement si $h = 0$.
$(.|.)_{\mathcal{H}}$ est donc défini positif.
• $(.|.)_{\mathcal{H}}$ est donc bien un produit scalaire sur $\mathcal{H}$.

(b) Comme $C(\tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})$, on a

$$D \circ C(\tau_x(\gamma_\lambda)) = D(c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})) = c_\lambda D(\tau_x(\gamma_{2\lambda})),$$

donc $D(\tau_x(\gamma_{2\lambda})) = \dfrac{1}{c_\lambda} D \circ C(\tau_x(\gamma_\lambda)) = \dfrac{1}{c_\lambda}\tau_x(\gamma_\lambda)$.
Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\tau_x(\gamma_{2\lambda})|h)_{\mathcal{H}} &= c_\lambda (D(\tau_x(\gamma_{2\lambda}))|D(h)) \quad \text{(par définition de } (.|.)_{\mathcal{H}}) \\ &= (c_\lambda D(\tau_x(\gamma_{2\lambda}))|D(h)) \quad \text{(par linéarité à gauche de } (.|.)) \\ &= (\tau_x(\gamma_\lambda)|D(h)) \text{(d'après le calcul préliminaire de cette question)} \\ &= h(x) \quad \text{(d'après la question 12c).}\end{aligned}$$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|h(x)| &= |(\tau_x(\gamma_{2\lambda})|h)_{\mathcal{H}}| \\ &\leq \|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\|_{\mathcal{H}} \|h\|_{\mathcal{H}} \quad \text{(d'après Cauchy-Schwartz).}\end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\|_{\mathcal{H}}^2 &= (\tau_x(\gamma_{2\lambda})|\tau_x(\gamma_{2\lambda}))_{\mathcal{H}} \\ &= c_\lambda (D(\tau_x(\gamma_{2\lambda}))|D(\tau_x(\gamma_{2\lambda}))) \quad \text{(par définition de } (.|.)_{\mathcal{H}}) \\ &= \frac{1}{c_\lambda}(\tau_x(\gamma_\lambda)|\tau_x(\gamma_\lambda)) \quad \text{(d'après le calcul fait au début de la question précédente)} \\ &= \frac{1}{c_\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) dy \\ &= \frac{1}{c_\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2(y-x)^2}{\lambda}\right) dy \\ &= \frac{1}{c_\lambda}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2u^2}{\lambda}\right) du}_{=c_\lambda} \quad \text{(en posant } u = y - x\text{. Toutes les hypothèses sont vérifiées)} \\ &= 1,\end{aligned}$$

donc on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|h(x)| \leq \|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\|_{\mathcal{H}} \|h\|_{\mathcal{H}} \leq \|h\|_{\mathcal{H}},$$

ie $\|h\|_\infty \leq \|h\|_{\mathcal{H}}$.

PARTIE V

14. • Si tous les a_i sont nuls, alors $J_* = 0$, atteint uniquement pour $h = 0$.
En effet, on a $J_* \geq 0$ comme minimum de nombres positifs, et, pour $h = 0$, $J(0) = 0$, donc $J* \leq J(0) \leq 0$, et, par suite, $J_* = 0$.
On a alors $J(j) = J_* \Leftrightarrow \|h\|_{\mathcal{H}} = 0 \Leftrightarrow h = 0$ (hypothèse de séparation pour une norme).
• Supposons à présent qu'au moins un des a_i est non nul, et, quitte à les renommer, on supposera que $a_1 \neq 0$.
Supposons que $\mathcal{S}_*$ possède au moins deux éléments distincts g et h. Alors, $j = \dfrac{g+h}{2} \in \mathcal{S}$ car $j \in \mathcal{H}$ (comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{H}$) et pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $j(x_i) = \dfrac{g(x_i)+h(x_i)}{2} = \dfrac{a_i+a_i}{2} = a_i$.
De plus,

$$\begin{aligned} J(j) &= \frac{1}{2}\|j\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{8}\|g+h\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{8}\left(\|g\|_{\mathcal{H}}^2 + \|g\|_{\mathcal{H}}^2 + 2(g|h)_{\mathcal{H}}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(2J_* + 2J_* + 2(g|h)_{\mathcal{H}}\right) \quad \text{(par choix de } g \text{ et } h\text{)} \\ &= \frac{1}{2}J_* + \frac{1}{4}(g|h)_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{1}{2}J_* + \frac{1}{4}\|g\|_{\mathcal{H}}\|h\|_{\mathcal{H}} \quad \text{(d'après Cauchy-Schwarz)} \\ &= \frac{1}{2}J_* + \frac{1}{4}2J_* \quad \text{(toujours par choix de } g \text{ et } h\text{)} \\ &= J_* \end{aligned}$$

Or, par définition de J_*, on a aussi $J(j) \geq J_*$, donc on a égalité, et, par suite, on est dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, donc (g,h) est liée, donc, quitte à inverser g et h, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $g = \mu h$.
Enfin, $g(x_1) = a_1 = \mu h(x_1) = \mu a_1$, donc, comme $a_1 \neq 0$, on a $\mu = 1$, et, par suite, $g = h$, ce qui est exclu.
D'où, par l'absurde, $\mathcal{S}_*$ possède bien au plus un élément dans ce cas.

15. Pour tout $h_0 \in \mathcal{H}_0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{h} + th_0 \in \mathcal{S}$ car
— $\tilde{h} + th_0 \in \mathcal{H}$ comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{H}$
— pour tout $i \in [\![1,p]\!]$,

$$(\tilde{h} + th_0)(x_i) = \tilde{h}(x_i) + th_0(x_i) = a_i + t \times 0 = a_i.$$

De plus, par définition de $\tilde{h}$, on a $J(\tilde{h} + th_0) \geq J(\tilde{h})$, ie $\|\tilde{h} + th_0\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2$.
Or

$$\|\tilde{h} + th_0\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2 + 2t(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}} + t^2\|h_0\|_{\mathcal{H}}^2,$$

donc

$$\|\tilde{h} + th_0\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2 \Leftrightarrow 2t(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}} + t^2\|h_0\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0.$$

Si $(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}} \neq 0$, alors

$$2t(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}} + t^2\|h_0\|_{\mathcal{H}}^2 \underset{t\to 0}{\sim} 2t(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}},$$

donc est du signe de $(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}}$ en 0^+ et de $-(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}}$ en 0^-.
Comme cette quantité doit être toujours positive, c'est exclu, donc $(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}} = 0$.

16. (a) • Soit $h \in \mathcal{S}_*$. Alors $h \in \mathcal{S}$ par définition de $\mathcal{S}_*$ et $h \in \mathcal{H}_0^\perp$ d'après la question précédente, donc $h \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$.
On a donc $\mathcal{S}_* \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$.
• Soit $h \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$.
Alors, pour tout $g \in mathcalS$, $h - g \in \mathcal{H}_0$ car pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $(g-h)(x_i) = g(x_i) - h(x_i) = a_i - a_i = 0$.
On a donc

$$\begin{aligned} \|g\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|h + (g-h)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \|h\|_{\mathcal{H}}^2 + \|g-h\|_{\mathcal{H}}^2 + 2\underbrace{(h, g-h)_{\mathcal{H}}}_{=0} \quad \text{(car } g-h \in \mathcal{H}_0 \text{ et } h \in \mathcal{H}_0^\perp\text{)} \\ &= \|h\|_{\mathcal{H}}^2 + \|g-h\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \|h\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

donc

$$J_* = \inf_{g\in\mathcal{H}} J(g) = \inf_{g\in\mathcal{H}} \frac{1}{2}\|g\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \frac{1}{2}\|h\|_{\mathcal{H}}^2 = J(h),$$

et, comme par ailleurs $J_* = \inf\limits_{g\in\mathcal{H}} J(g) \leq J(h)$, on a $J_* = J(h)$ et $h \in \mathcal{S}_*$.
On a donc $\mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp \subset \mathcal{S}_*$.
• Par double inclusion, on a bien l'égalité : $\mathcal{S}_* = \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$.

(b) Soit $i \in [\![1,p]\!]$.
Pour tout $h_0 \in \mathcal{H}_0$,

$$\begin{aligned}(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})|h_0)_{\mathcal{H}} &= h_0(x_i) \quad \text{(d'après la question 13b avec } h_0 \in \mathcal{H}) \\ &= 0 \quad \text{(par définition de } \mathcal{H}_0),\end{aligned}$$

donc $\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \in \mathcal{H}_0^{\perp}$ (on a bien $\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \in \mathcal{H}$). Par suite, $\operatorname{Vect}((\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}))_{1\le i\le p}) \subset \mathcal{H}_0^{\perp}$ comme sous-espace vectoriel engendré par des éléments de $\mathcal{H}_0^{\perp}$.

17. (a) h_α est une interpolante si et seulement si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $h_\alpha(x_i) = a_i$.
Or, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$,

$$\begin{aligned} a_i = & h_\alpha(x_i) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda})(x_i) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \exp\left(-\frac{(x_i - x_j)^2}{2\lambda}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} K_{ij}\alpha_j \quad \text{(par définition de } K\text{, en dimension } d=1\text{, car } |x_i - x_j|^2 = (x_i - x_j)^2) \\ &= (K\alpha)_i \end{aligned}$$

donc on a bien $K\alpha = a$.

(b) Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$,

$$K_{ij} = \exp\left(-\frac{(x_i - x_j)^2}{2\lambda}\right) = \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda})(x_i) = (\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})|\tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}))_{\mathcal{H}}$$

d'après la question 13b.
Notons $(C_1, \dots, C_p)$ les colonnes de K.
Soit $(\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{j=1}^{n} \beta_j C_j = 0$.
Alors, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p} \beta_j K_{ij} = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \beta_j (\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})|\tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}))_{\mathcal{H}} = 0 \\ &\Rightarrow \left(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})| \sum_{j=1}^{p} \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda})\right)_{\mathcal{H}} = 0 \quad \text{(par linéarité à droite du produit scalaire).}\end{aligned}$$

Par suite,

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i \underbrace{\left(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})| \sum_{j=1}^{p} \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda})\right)_{\mathcal{H}}}_{=0} = 0,$$

donc, par linéarité à droite du produit scalaire,

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \beta_i\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})| \sum_{j=1}^{p} \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda})\right)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \text{ie} \quad \left\| \sum_{i=1}^{p} \beta_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})\right\|_{\mathcal{H}}^2 = 0.$$

On a donc $\sum_{i=1}^{p} \beta_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0$, donc, comme la famille $(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}))_{1\le i\le p}$ est libre (d'après la question 12a) on a $\beta_i = 0$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$.
La famille $(C_1, \dots, C_p)$ est donc libre, ce qui assure l'inversibilité de la matrice carrée K.
Rq : Les écritures sont lourdes ici, mais, ce qu'on vient de montrer, c'est que si la famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ *est libre, alors la matrice* $(\langle x_i, x_j\rangle)_{1\le i,j\le n}$ *est inversible.*

18. • Comme K est inversible, $K\alpha = a \leftrightarrow \alpha = K^{-1}a$.
Par suite, en posant $\alpha_* = K^{-1}a$, on a h_{α_*} interpolante, ie $h_{\alpha_*} \in \mathcal{S}$.
De plus, $h_{\alpha_*} \in \operatorname{Vect}((\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}))_{1\le i\le p}) \subset \mathcal{H}_0^{\perp}$. On a donc $h_{\alpha_*} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^{\perp} = \mathcal{S}_*$.
• Comme $\mathcal{S}_*$ contient au plus un élément (d'après la question 14), on a donc $\mathcal{S}_* = \{h_{\alpha_*}\}$.
• De plus, $J_* = \dfrac{1}{2}\|h_*\|_{\mathcal{H}}$.

Or, en notant $\alpha_* = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_p^*)$, on a

$$\begin{aligned}
\|h_*\|_{\mathcal{H}}^2 &= \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^* \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) | \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^* \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \alpha_i^* \alpha_j^* \left(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) | \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}) \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \alpha_i^* \alpha_j^* K_{ij} \quad \text{(d'après les calculs faits au début de la question précédente)} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\alpha_i^* \sum_{j=1}^{p} K_{ij} \alpha_j^* \right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\alpha_i^* (K\alpha_*)_i \right) \\
&= \alpha_*^T (K\alpha_*) = (K^{-1}a)^T K K^{-1} a = a^T (K^{-1})^T a,
\end{aligned}$$

donc

$$J_* = \frac{1}{2} \|h_{\alpha_*}\|_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^T (K^{-1})^T a}.$$