CALCUL DIFFÉRENTIEL (Partie 1)
DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS VECTORIELLES
Cours

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel non nul.
On s'intéresse ici aux fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
Ce sont des fonctions entre espaces vectoriels normés de dimension finie ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$) donc les notions de limite et continuité vues dans le chapitre Espaces vectoriels normés s'appliquent à ces fonctions.

I. Définitions et premières propriétés

A. Définitions

Définition 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$. Soit $a \in I$.

- On appelle *taux d'accroissement de f en a* la fonction :

$$\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t-a}\big(f(t) - f(a)\big). \end{array}$$

- On dit que *f est dérivable en a* lorsque son taux d'accroissement en a admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^n$ en a.
  Dans ce cas, on dit que ℓ est *le vecteur dérivé de f en a* et on le note $f'(a)$.

- Lorsque $n = 1$, on retrouve les notions connues pour les fonctions à valeurs réelles.
- Par composition de limites :

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(f(a+h) - f(a)\big) \text{ existe dans } \mathbb{R}^n.$$

- $f'(a)$ est parfois noté $Df(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$.

Définition 2

On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I.
On appelle alors *fonction dérivée de f sur I* et on note f' la fonction $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & f'(t). \end{array}$

On note $\mathscr{D}(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Interprétation cinématique :
On étudie un *point mobile* $M(t)$ du plan dont la position est fonction du temps t qui varie dans I.
Un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ étant fixé, pour tout $t \in I$, on note $f(t) = (x(t), y(t))$ les coordonnées du point $M(t)$.
La fonction f est la *loi horaire du mouvement.*
Si f est dérivable en t alors $f'(t)$ est le *vecteur vitesse* du point mobile à l'instant t.
Si f est deux dérivable en t (c'est-à-dire f est dérivable sur I et f' est dérivable en t) alors $f''(t)$ est le *vecteur accélération* du point mobile à l'instant t.

On peut de même s'intéresser à un point mobile de l'espace avec $f : \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$.

B. Propriétés

Soit $a \in I$.

Proposition 3 (*Développement limité de f à l'ordre 1 en a*)

La fonction f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\varepsilon \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R}^n)$ telle que $\lim\limits_{t\to a} \varepsilon(t) = (0,\dots,0)$ et $\ell \in \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\forall t \in I,\ f(t) = f(a) + \ell(t-a) + (t-a)\varepsilon(t).$$

Dans ce cas, $\ell = f'(a)$.

Autre formulation : $\forall h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I$, $f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = (0,\dots,0)$

Corollaire 4

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Attention, la réciproque est fausse (*Contre-exemple : $x \mapsto |x|$ en 0*).

Proposition 5 (*Fonctions coordonnées*)

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.
Pour tout $t \in I$, on note $\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ le vecteur-colonne des coordonnées de $f(t)$ dans $\mathscr{B}$.
La fonction f est dérivable en a (respectivement sur I) si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables en a (resp. sur I).
Dans ce cas, on a $f'(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k'(a) e_k$.

En particulier, si $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient :
$f : \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & (f_1(t), \dots, f_n(t)) \end{array}$ est dérivable en a si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, f_k est dérivable en a.

Dans ce cas, $f'(a) = (f_1'(a), \dots, f_n'(a))$.

Exemple 1 : Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = (0,0)$ et si $t \neq 0$, $f(t) = \left(t^2 \sin \dfrac{1}{t}, t^2 \cos \dfrac{1}{t}\right)$.
Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0.

Exemple 2 : Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$.
Montrer que f est constante sur I si et seulement si f est dérivable sur I et $\forall t \in I$, $f'(t) = (0, \dots, 0)$.

II. Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 6 (*Combinaison linéaire*)

- Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^n$. Soit $a \in I$.
  Si f et g sont dérivables en a alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ est dérivable en a et on a :
  $$(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a).$$
- Si $(f, g) \in \left(\mathscr{D}(I, \mathbb{R}^n)\right)^2$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R}^n)$ et on a :
  $$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'.$$
  Par suite, $\mathscr{D}(I, \mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition 7 (*Composition*)

- Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{R}^n$ avec $\varphi(I) \subset J$. Soit $a \in I$.
  Si φ est dérivable en a et f est dérivable en $\varphi(a)$ alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et on a :
  $$(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a).f'\big(\varphi(a)\big).$$
- Si $\varphi \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{D}(J, \mathbb{R}^n)$ avec $\varphi(I) \subset J$ alors $f \circ \varphi \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R}^n)$ et on a :
  $$(f \circ \varphi)' = \varphi'.(f' \circ \varphi).$$

Proposition 8 (*Composition avec une application linéaire*)

- Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Soit $a \in I$.
  Si f est dérivable en a alors $L \circ f$ est dérivable en a et on a :
  $$(L \circ f)'(a) = L\big(f'(a)\big).$$
- Si $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R}^n)$ et $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ alors $L \circ f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R}^p)$ et on a :
  $$(L \circ f)' = L \circ f'.$$

Proposition 9 (*Composition avec une application bilinéaire*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$, $g : I \to \mathbb{R}^p$ et $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application bilinéaire.
On note
$$B(f,g) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^q \\ t & \mapsto & B\big(f(t), g(t)\big). \end{array}$$

- Soit $a \in I$. Si f et g sont dérivables en a alors $B(f,g)$ est dérivable en a et on a :
$$\big(B(f,g)\big)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)).$$
- Si $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R}^p)$ et B est une application bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ alors $B(f,g) \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R}^q)$ et on a :
$$\big(B(f,g)\big)' = B(f', g) + B(f, g').$$

Exemples d'applications bilinéaires :

- *Produit :* L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda . x \end{array}$ est bilinéaire.
- *Produit scalaire :* L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \langle x, y \rangle \end{array}$ est bilinéaire.

Exemple 3 :

1. Soit $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R}^n)$.
Montrer que $f.g \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R}^n)$ et déterminer $(f.g)'(t)$ pour tout $t \in I$.
2. Soit $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R}^n)$.
Pour tout $t \in I$, on note $\varphi(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$ où $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
Montrer que $\varphi \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ et déterminer $\varphi'(t)$ pour tout $t \in I$.

Exemple 4 : Soit $\langle ., . \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Soit $(f, g) \in \big(\mathscr{D}(I, \mathbb{R}^n)\big)^2$.
Montrer la dérivabilité sur I et dériver les fonctions φ_1, φ_2 et φ_3 définies pour tout $t \in I$ par :
$$\varphi_1(t) = \langle a, f(t) \rangle, \ \ \varphi_2(t) = \| f(t) \|^2 \ \text{ et } \ \varphi_3(t) = \| f(t) \|$$
en supposant pour φ_3 que f ne s'annule pas sur I.

Application : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R}^n) \cap \mathscr{D}(]a, b[, \mathbb{R}^n)$.
On note $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

1. *Inégalité des accroissements finis :*
En utilisant la fonction $\varphi : t \mapsto \langle f(b) - f(a) \,|\, f(t) \rangle$, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :
$$\| f(b) - f(a) \| \leqslant (b - a) \| f'(c) \|.$$
2. En utilisant la fonction $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, montrer que l'égalité des accroissements finis n'est pas valable pour les fonctions vectorielles.

Proposition 10 (*Composition avec une application multilinéaire*)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f_k : I \to \mathbb{R}^{n_k}$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$.
Soit $M : \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_p} \to \mathbb{R}^q$ une application p-linéaire.
On note
$$M(f_1,\ldots,f_p) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^q \\ t & \mapsto & M\big(f_1(t),\ldots,f_p(t)\big). \end{array}$$

- Soit $a \in I$. Si pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, f_k est dérivable en a alors $M(f_1,\ldots,f_p)$ est dérivable en a et on a :
$$\big(M(f_1,\ldots,f_p)\big)'(a) = \sum_{k=1}^{p} M\big(f_1(a),\ldots,f_k'(a),\ldots,f_p(a)\big).$$
- Si pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $f_k \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R}^{n_k})$ et M est une application p-linéaire de $\mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_p}$ dans $\mathbb{R}^q$ alors $M(f_1,\ldots,f_p) \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R}^q)$ et on a :
$$\big(M(f_1,\ldots,f_p)\big)' = \sum_{k=1}^{p} M\big(f_1,\ldots,f_k',\ldots,f_p\big).$$

Exemple 5 : Soit $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Soit $(f_1,\ldots,f_n) \in \big(\mathscr{D}(I,\mathbb{R}^n)\big)^n$.
On pose pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \det_{\mathscr{B}}(f_1(t),\ldots,f_n(t))$.
Montrer que ψ est dérivable sur I et déterminer ψ'.

Application : Soit a et b deux fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose que y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation différentielle $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.
On appelle *wronskien* l'application définie par : $\forall t \in I,\ w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_1'(t) \\ y_2(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$.
Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par le wronskien.
En déduire que si le wronskien s'annule alors le wronskien est la fonction nulle.

III. Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$. On pose la définition suivante par récurrence :
Lorsque f est dérivable sur I, on note $f^{(1)} = f'$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est $(k+1)$ fois dérivable sur I lorsque f est k fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ est dérivable sur I. On note alors $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.

Définition 11

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est *de classe $\mathscr{C}^k$ sur I* lorsque f est k fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ est continue sur I.
- On dit que f est *de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I* lorsque f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, on note $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
Tous les résultats du paragraphe précédent (le deuxième point des *Propositions 6 à 10*) sont valables en remplaçant $\mathscr{D}$ par $\mathscr{C}^k$.
En particulier, $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Pour le calcul, on a les résultats suivants :

Proposition 12

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Si $(f,g) \in \left(\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^n)\right)^2$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$ et on a :
$$(\lambda f + g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + g^{(k)}.$$
- Si $f \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$ et $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ alors $L \circ f \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^p)$ et on a :
$$(L \circ f)^{(k)} = L \circ (f^{(k)}).$$
- *Formule de Leibniz :*
Si $f \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^p)$ et B est une application bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ alors $B(f,g) \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^q)$ et on a :
$$(B(f,g))^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B(f^{(i)}, g^{(k-i)}).$$

Cas particulier du produit : Si $f \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$ alors $f.g \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$ et on a :
$$(f.g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}.$$

Exemple 6 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f_n(x) = x^{n-1}e^{1/x}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout x non nul, $f_n^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$.