DM 6 - Sous espace vectoriel - Probabilités

Exercice 1 Soit m un nombre réel. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, 1, m), \quad v_2 = (2, m+1, 2), \quad v_3 = (m, 1, 1).$$

On note V le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par ces vecteurs (autrement dit, $V = Vect(v_1, v_2, v_3)$)

1. Déterminez les valeurs de m pour laquelle la famille (v_1, v_2, v_3) est libre. Que vaut alors V ?
2. Pour $m = 1$, déterminez une base et la dimension de V. Décrire géométriquement.
3. Mêmes questions que 2) avec $m = -3$.
4. Donnez pour $m = 0$ les coordonnées du vecteur $(4, 2, 1)$ dans la base (v_1, v_2, v_3).

---

1. On cherche λ, μ, ν réels tels que

$$\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 = (0, 0, 0)$$

On obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda + 2\mu + m\nu & = 0 \\ \lambda + (m+1)\mu + \nu & = 0 \\ m\lambda + 2\mu + \nu & = 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rl} \lambda + 2\mu + m\nu & = 0 \\ (m-1)\mu + (1-m)\nu & = 0 \\ (2-2m)\mu + (1-m^2)\nu & = 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rl} \lambda + 2\mu + m\nu & = 0 \\ (m-1)\mu + (1-m)\nu & = 0 \\ (3-2m-m^2)\nu & = 0 \end{array}\right.$$

Ce système est de rang 3 (et donc une seule solution) si et seulement si $m - 1 \neq 0$ et $3 - 2m - m^2 \neq 0$, donc si et seulement si $m \neq 1$ et $m \neq -3$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\},}$ le système est de rang 3, et alors $\lambda = \mu = \nu = 0$ et la famille est libre.

On alors que V est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 et donc $V = \mathbb{R}^3$

2. pour $m = 1$, on obtient $v_1 = v_3$ et $v_2 = 2v_1$, ainsi $V = Vect(v_1)$: c'est une droite dirigée par $(1, 1, 1)$ (et passant par $(0, 0, 0)$).

3. Pour $m = -3$, le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda + 2\mu - 3\nu & = 0 \\ -4\mu + 4\nu & = 0 \\ 0 & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \lambda & = \nu \\ \mu & = \nu \\ \nu & \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Ainsi la famille est liée et $v_3 \in vect(v_1, v_2)$ (on peut par exemple prendre $\nu = 1$)

Ainsi, $V = Vect((1, 1, -3), (2, -2, 2))$. Les deux vecteurs v_1 et v_2 sont non colinéaires, donc ils constituent une base de V. V est alors un plan, contenant $(0, 0, 0)$ et dirigé par v_1 et v_2.

4. Pour $m = 0$, on a $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (2, 1, 2)$ et $v_3 = (0, 1, 1)$. D'après l'étude précédente, on sait qu'on a bien affaire à une base.

Pour trouver les coordonnées de $(4, 2, 1)$ dans cette base, on cherche $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x(1, 1, 0) + y(2, 1, 2) + z(0, 1, 1) = (4, 2, 1)$. On résout le système et on trouve que $(4, 2, 1) = 2v_1 + v_2 - v_3$ et donc que $\boxed{\text{les coordonnées de } (4, 2, 1) \text{ dans cette base sont } (2, 1, -1).}$

Exercice 2

Une puce effectue des sauts aléatoires sur les trois sommets d'un triangle ABC. A chaque saut, elle peut soit sauter sur place, soit sauter vers un des deux autres sommets. Les probabilités pour que la place de départ soit A, B ou C sont respectivement notée a_0, b_0, c_0. La puce est obligatoirement sur un des sommets au départ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n (respectivement B_n et C_n), les événements : "après le n-ième saut, la puce est au point A" (respectivement B et C). On note a_n, b_n et c_n leurs probabilités respectives. Ainsi $a_n = P(A_n)$, etc...

Pour M et N appartenant à $\{A, B, C\}$, on note p_{MN} la probabilité que le saut s'effectue de M vers N. On suppose que cette probabilité ne dépend pas du numero du saut.

Ainsi, par exemple, p_{AB} désigne la probabilité que, si la puce est en A, elle saute vers le sommet B. On a en fait $p_{AB} = P_{A_n}(B_{n+1})$ pour tout n...

Première partie :

1. Justifiez que $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrez que $a_{n+1} = p_{AA}a_n + p_{BA}b_n + p_{CA}c_n$. Exprimez de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. En déduire la matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

3. Soit $a \in]0, \frac{1}{2}[$. Pour M et N appartenant à $\{A, B, C\}$ avec $M \neq N$, on pose $p_{MN} = a$ et $p_{MM} = 1 - 2a$.
   a) Ecrire la matrice M correspondant à ces valeurs.
   b) En justifiant que $b_n + c_n = 1 - a_n$, montrez que (a_n) et une suite arithmético-géométrique, et exprimez a_n en fonction de n et de a_0.
   c) Montrez que $|1 - 3a| < 1$.
   d) En déduire la limite de chacune des suites (a_n), (b_n) et (c_n). Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Deuxième partie

Dans cette partie, on suppose $p_{AA} = 1$, $p_{BA} = p_{BB} = \frac{1}{2}$ et $p_{CA} = p_{CB} = p_{CC} = \frac{1}{3}$.

1. Comment interpréter la condition $p_{AA} = 1$? Ecrire la matrice M associée à ces valeurs.
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminez P^{-1}.
3. Soit $D = P^{-1}MP$. Calculez D et précisez D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$. En déduire M^n.
5. Justifiez que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$. En déduire $\lim a_n$.
   Quelle interprétation pouvez-vous en faire ?

Première partie :

1. A_0, B_0 et C_0 forment un système complet d'événement, donc $A_0 \cup B_0 \cup C_0 = \Omega$ et $P(A_0 \cup B_0 \cup C_0) = 1$.
   Comme les événements sont incompatibles, on obtient : $P(A_0) + P(B_0) + P(C_0) = 1$, soit, avec les notations de l'énoncé, $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.
   ATTENTION : a_0, b_0 et c_0 ne sont pas un système complet d'événements ! c'est A_0, B_0 et C_0 qui sont des événements, les lettres minuscules sont des nombres...
   De la même manière, A, B et C n'est pas un système complet d'événements : ce sont des points !
2. il suffit d'utiliser le système complet d'événement $\{A_n, B_n, C_n\}$ et la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}).$$

   Enfin, on traduit les proba conditionnelles en fonction des p_{MN} et il vient :
   $\boxed{a_{n+1} = p_{AA}a_n + p_{BA}b_n + p_{CA}c_n}$
   Remarque : la formule des probas totales prévoit dans la forme donnée en cours le fait qu'un des événements peut être de probabilité nulle (par exemple si $a_n = 0$). Néanmoins la formule donnée ici fonctionne aussi si $a_n = 0$ (c'est juste qu'on prendrait alors comme s.c.e B_n et C_n) ou si $b_n = 0$ ou $c_n = 0$.
   Bref, tout va bien ;-)
   On raisonne de la même façon pour b_{n+1} et c_{n+1} et on a
   $\boxed{b_{n+1} = p_{AB}a_n + p_{BB}b_n + p_{CB}c_n \text{ et } c_{n+1} = p_{AC}a_n + p_{BC}b_n + p_{CC}c_n}$
   On pose enfin

$$M = \begin{pmatrix} p_{AA} & p_{BA} & p_{CA} \\ p_{AB} & p_{BB} & p_{CB} \\ p_{AC} & p_{BC} & p_{CC} \end{pmatrix}$$

3. a) On a $M = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$
   b) Comme A_n, B_n et C_n forment un s.c.e, on a $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1$, autrement dit $a_n + b_n + c_n = 1$, d'où $b_n + c_n = 1 - a_n$.
   On écrit ensuite pour $n \in \mathbb{N}$,
   $a_{n+1} = (1-2a)a_n + ab_n + ac_n = (1-2a)a_n + a(1-a_n) = a + (1-3a)a_n$.

On cherche maintenant c tel que $a_n - c$ est géométrique de raison $(1-3a)$. On trouve $c = \frac{1}{3}$ et on arrive à

$$\boxed{a_n = \frac{1}{3} + (a_0 - \frac{1}{3})(1-3a)^n}$$

c) Comme $0 < a < \frac{1}{2}$, on a $-\frac{1}{2} < 1 - 3a < 1$ et donc $|1-3a| < 1$.

d) Comme $|1-3a| < 1$, alors $(1-3a)^n \to 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}$.
Pour avoir b_n et c_n, on peut recommencer le raisonnement en entier, ou bien voir que le problème est symétrique (A, B et C joue le même rôle), donc que la formule est identique, c'est à dire :

$$\boxed{b_n = \frac{1}{3} + (b_0 - \frac{1}{3})(1-3a)^n \text{ et } c_n = \frac{1}{3} + (c_0 - \frac{1}{3})(1-3a)^n}$$

D'où encore $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}$.
Interprétation : à long terme, les trois positions sont équiprobables. La position initiale de la puce est "oubliée".

Deuxième partie :

1. $p_{AA} = 1$ signifie que si la puce est en A, elle y reste. On a alors $p_{AC} = p_{AB} = 0$. Il en est de même pour p_{BC} : la puce ne va jamais en C à partir de B....
2. On a $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.
3. On calcule et on trouve $P^{-1} = P$.
4. On trouve $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$. Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix}$.
5. C'est une démo par récurrence faite déjà plein de fois. On arrive à

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1-(1/2)^n & 1-2(1/2)^n+(1/3)^n \\ 0 & (1/2)^n & 2(1/2)^n - 2(1/3)^n \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix}$$

6. Comme d'habitude, par une récurrence rapide, on a la relation proposée et on a

$$\boxed{a_n = a_0 + (1-(1/2)^n)b_0 + (1-2(1/2)^n + (1/3)^n)c_0}$$

Interprétation : remarquons que $(1/2)^n$ et $(1/3)^n$ tendent vers 0 (forme q^n avec $|q| < 1$), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a_0 + b_0 + c_0 = 1$. Ainsi, à long terme, on est sûr que la puce finira par aller en A et n'en bougera plus...