Corrigé de sujet
X-ENS - Filière PC - Session 2023

17 avril 2023

I Première partie

Question 1. On somme selon $j \in [\![1;d]\!]$ l'inégalité supposée $P_{i,j} \geq c\nu_j$, et on obtient :

$$\sum_{j=1}^{d} P_{i,j} \geq c \sum_{j=1}^{d} \nu_j \text{ c'est-à-dire } 1 \geq c.$$

Question 2. On note e le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. On note que, pour tout vecteur ligne v à coefficients positifs, on a $v \in \mathcal{P}$ si et seulement si $ve = 1$, et que $Pe = e$.
Supposons que $u \in \mathcal{P}$. Alors :

$$(uP)e = ue = 1$$

ce qui montre que $uP \in \mathcal{P}$.

Question 3. Soit $u, v \in \mathcal{P}$. On note que $\sum_{k=1}^{d} (u_k - v_k)\nu_j = 0$ pour tout j, si bien que, pour tout $j \in [\![1;d]\!]$,

$$(uP - vP)_j = \sum_{k=1}^{d} (u_k - v_k)(P_{k,j} - c\nu_j)$$

Puis, puisque $P_{k,j} - c\nu_j \geq 0$:

$$\|uP - vP\|_1 \leq \sum_{k=1}^{d} |u_k - v_k| \sum_{j=1}^{d} (P_{k,j} - c\nu_j)$$

ce qui donne

$$\|uP - vP\|_1 \leq (1-c) \sum_{k=1}^{d} |u_k - v_k|$$

puisque $\nu \in \mathcal{P}$.

Question 4. Le résultat de la question 2 justifie que les termes de la suite $(x_n)_n$ appartiennent bien à $\mathcal{P}$. En itérant l'inégalité de la question précédente (avec $(u, v) = (x_n, x_{n-1})$ et les précédents), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|x_{n+1} - x_n\|_1 \leq (1-c)^n \|x_1 - x_0\|$$

Comme $(1-c) \in [0;1[$, la série de terme général $(1-c)^n$ converge, donc, par majoration, celle de terme général $\|x_{n+1}-x_n\|_1$ converge également.

Question 5. Soit $j \in [\![1;d]\!]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n+1,j} - x_{n,j}| \leq \|x_{n+1} - x_n\|_1$$

donc, par majoration et par lien suite-série, la série de terme général $x_{n+1,j} - x_{n,j}$ converge (à j fixé). Ainsi, la suite de vecteurs $(x_n)_n$ converge, composante par composante, donc converge.

De plus, $\mathcal{P}$ est fermé, car il s'agit de l'image réciproque du singleton $\{1\}$ (fermé) par l'application $x \mapsto \sum_{k=1}^{d} x_k$, qui est continue, car polynomiale en les composantes de $x \in \mathbb{R}^d$. Donc $\lim(x_n) \in \mathcal{P}$.

Question 6. La continuité de l'application $t \mapsto tP$ sur $\mathbb{R}^d$ (elle est polynomiale en les composantes de t) permet d'obtenir $\mu = \mu \cdot P$ en passant à la limite $n \to +\infty$ dans l'égalité $x_{n+1} = x_n P$.
De plus, $\mu \in \mathcal{P}$, car $\mathcal{P}$ est fermé.
Si deux vecteurs μ, μ' conviennent, l'inégalité de la question 3 donne $\|\mu' - \mu\|_1 \leq (1-c)\|\mu' - \mu\|_1$, ce qui n'est possible que si $\mu = \mu'$ puisque $c > 0$.

Question 7. Soit $x \in \mathcal{P}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|xP^n - \mu\|_1 = \|xP^n - \mu P^n\| \leq (1-c)^n \, \|x - \mu\|_1 \leq (1-c)^n (\|x\|_1 + \|\mu\|_1)$$

par itération de l'inégalité de la question 3. De plus, pour tout $y \in \mathcal{P}$, on a

$$\|y\|_1 = \sum_{j=1}^{d} y_j = 1$$

Ceci donne le facteur 2 recherché dans l'inégalité.

II Deuxième partie

Question 8. Soit $i \in [\![1;d]\!]$. On calcule la somme :

$$\sum_{j=1}^{d} P_{i,j} = \frac{(Mh)_i}{\lambda h_i} = \frac{\lambda h_i}{\lambda h_i} = 1$$

Question 9. En notant $D = \mathrm{Diag}(h_1, \ldots, h_d)$, matrice diagonale inversible, on a :

$$P = \frac{1}{\lambda} D^{-1} M D$$

Ceci donne $P^n = \dfrac{1}{\lambda^n} D^{-1} M^n D$, ou encore, pour tous $i, j \in [\![1; d]\!]$:

$$P^n_{i,j} = \frac{(M^n)_{i,j} h_j}{\lambda^n h_i}.$$

Question 10-a. Pour commencer, les h_i étant tous > 0, on peut donc trouver $c' > 0$ tel que $P_{i,j} \geq c' \nu_j$ pour tous $i, j \in [\![1; d]\!]$. Partant de l'inégalité $P_{i,j} \geq \dfrac{c h_j}{\lambda h_i} \nu_j$, il suffit en effet de prendre $c' = \displaystyle\min_{1 \leq i,j \leq d} \dfrac{c h_j}{\lambda h_i}$, qui est bien > 0.
Ainsi, d'après la partie I, on peut se donner $\mu \in \mathcal{P}$ (unique) tel que $\mu P = \mu$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour n'importe quel vecteur $x \in \mathcal{P}$, on applique l'inégalité de la question 7 et on obtient :

$$\sum_{j=1}^{d} \left| \sum_{i=1}^{d} x_i \left(\frac{h_j}{h_i} \lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - \mu_j \right) \right| \leq 2(1 - c')^n.$$

ou encore :

$$\sum_{j=1}^{d} \left| \sum_{i=1}^{d} \frac{h_j}{h_i} x_i \left(\lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - \mu_j \frac{h_i}{h_j} \right) \right| \leq 2(1 - c')^n.$$

En particulier, pour chaque $j \in [\![1; d]\!]$, on a

$$\left| \sum_{i=1}^{d} \frac{x_i}{h_i} \left(\lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - \mu_j \frac{h_i}{h_j} \right) \right| \leq \frac{2}{h_j} (1 - c')^n$$

Il suffit alors d'appliquer cette inégalité avec deux vecteurs x :

- l'un avec des composantes nulles dès que $\lambda^{-n}(M^n)_{i,j} - \mu_j \dfrac{h_i}{h_j} \leq 0$, égales par ailleurs
- l'autre avec des composantes nulles dès que $\lambda^{-n}(M^n)_{i,j} - \mu_j \dfrac{h_i}{h_j} > 0$, égales par ailleurs

en notant qu'alors $x_i \geq \dfrac{1}{d}$ dès qu'il est non nul, dans les deux cas (puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{d} x_i = 1$).
On obtient, en sommant les deux inégalités produites :

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{hd} \left| \lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - \mu_j \frac{h_i}{h_j} \right| \leq \frac{4}{h_j} (1 - c')^n$$

où $h = \displaystyle\max_{1 \leq i \leq d} h_i$.

Il ne reste plus qu'à sommer sur $j \in [\![1; d]\!]$ pour obtenir l'inégalité voulue, avec $C = 4hd \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \frac{1}{h_j}$ et $\gamma = 1 - c' \in [0; 1[$.

Question 10-b. Soit $\pi \in M_{1,d}(\mathbb{R}_+)$. L'équation $\pi M = \lambda M$ équivaut à $(\pi D) P = \pi D$ (où D est la matrice introduite dans la réponse à la question 9). Pour chaque $\pi \in M_d(\mathbb{R}_+) \backslash \{0\}$, on dispose de $\beta(\pi) \in \mathbb{R}_+^*$ unique tel que $\dfrac{1}{\beta(\pi)} \pi D \in \mathcal{P}$ (c'est d'ailleurs $\beta(\pi) = \|\pi D\|_1$).
Comme il existe un unique $\mu \in \mathcal{P}$ tel que $\mu P = P$ (résultat de la question 6), on obtient

alors que l'équation $\pi M = \lambda M$ équivaut à $\dfrac{\pi}{\beta(\pi)} D = \mu$. On trouve donc π nécessairement colinéaire à μD^{-1}.
Réciproquement, en posant $\pi = \alpha \mu D^{-1}$, on trouve un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\pi \in \mathcal{P}$ (puisque les composantes de μD^{-1} sont toutes positives). Ceci assure existence et unicité de π tel que recherché.

Question 11. On voit que, pour tout $k \in [\![0; d-1]\!]$, on a $P^{(k)}(0) < 0$ et $P^{(k)}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Par ailleurs, on démontre par récurrence descendante sur $k \in [\![0; d-1]\!]$ que $P^{(k)}$ s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en un certain a_k, avec $P^{(k)}$ strictement négatif sur $]0; a_k[$.

- Initialisation ($k = d-1$) : on a $P^{(d-1)} = d! \cdot X - c_{d-1}(d-1)!$ avec $c_{d-1} > 0$, donc le résultat apparaît.
- Hérédité : soit $k \in [\![1; d-1]\!]$ tel que la propriété soit vraie au rang k. Alors $P^{(k-1)}$ est strictement décroissante sur $]0; a_k]$ et strictement croissante sur $[a_k; +\infty[$, avec $P^{(k-1)}(0) < 0$ et $P^{(k-1)}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $P^{(k-1)}$ s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$, par théorème de la bijection continue, sur $]a_k; +\infty[$. En notant a_{k-1} son point d'annulation, $P^{(k-1)}$ est de plus strictement négative sur $]0; a_{k-1}[$ et strictement positive sur $]a_{k-1}; +\infty[$.

Question 12-a. On pose le système $\pi M = \lambda \pi$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\pi \in \mathbb{R}^d$. On obtient les équations suivantes :

$$\sum_{j=1}^{d} \pi_j a_j = \lambda \pi_1 \text{ et } \forall k \in [\![1; d-1]\!],\ b_k \pi_k = \lambda \pi_{k+1} \ (\star)$$

Il est possible de trouver $\pi \neq 0$ solution de ce système si et seulement si

$$\lambda^d - \sum_{j=1}^{d} \left[a_j \prod_{k=1}^{j-1} b_k \right] \lambda^{d-j} = 0$$

Or cette équation polynomiale est exactement de la forme étudiée en question 11, donc elle admet une unique solution $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Prenons un tel λ. D'après les équations, il reste à fixer π_d de telle sorte que

$$\pi_d \cdot \sum_{j=1}^{d} \frac{\lambda^{d-j}}{\prod_{k=j}^{d-1} b_k} = 1$$

ce qui est possible de manière unique, car le coefficient $\alpha = \sum_{j=1}^{d} \dfrac{\lambda^{d-j}}{\prod_{k=j}^{d-1} b_k}$ est strictement positif.
Finalement, on dispose bien d'un unique couple $(\lambda, \pi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{P}$ tel que $\pi M = \lambda M$ et on a alors

$$\pi = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\lambda^{d-1}}{b_1 \times \cdots \times b_{d-1}}, \frac{\lambda^{d-2}}{b_2 \times \cdots \times b_{d-1}} \ldots, \frac{\lambda}{b_{d-1}}, 1 \right).$$

Question 12-b. On applique les résultats des questions 9 à 10-b à la matrice $M^\top$, qui vérifie les bonnes conditions :

— $M^\top$ est à coefficients positifs

— on dispose du vecteur $\pi^\top \in \mathcal{P}$, de la question précédente, tel que $M^\top \pi^\top = \lambda \pi^\top$

— le vecteur $\pi^\top$ a toutes ses composantes strictement positives

— il s'agit de trouver $\nu \in \mathcal{P}$ et $c > 0$ tels que $\forall i, j \in [\![1; d]\!], M_{i,j}^\top \geq c\nu_j$, et, pour cela, il suffit de prendre $\nu = \left(\frac{1}{d}, \ldots, \frac{1}{d}\right)$ et $c = d \cdot \min(a_1, \ldots, a_d, b_1, \ldots, b_{d-1})$, qui est bien strictement positif.

Ainsi, on dispose d'un (unique) $\mu \in \mathcal{P}$ tel que $\mu M^\top = \lambda\mu$. On pose alors $h = \mu^\top$ et on a alors $Mh = \lambda h$.

Montrons que les composantes de h sont strictement positives. Supposons par l'absurde qu'on dispose de $k \in [\![1; d]\!]$ tel que $h_k = 0$ et supposons k minimal. Si $k = 1$ alors la dernière ligne du produit $Mh = \lambda h$ donne $h_d = 0$. Puis, la précédente donne $h_{d-1} = 0$. Par conséquent, tout le vecteur h est nul, ce qui est absurde.

Supposons $k \geq 2$. Alors la k-ième ligne du produit matriciel donne $a_k h_1 + b_k h_{k+1} = 0$. Par positivité de tous les termes et stricte positivité de a_k et b_k, ceci implique $h_1 = 0$, ce qui est absurde.

Concernant la condition sur le produit scalaire, puisque $\pi \in \mathbb{R}_+^d \backslash \{0\}$ et $h \in (\mathbb{R}_+^*)^d$, on a $\langle \pi, h \rangle > 0$. Il suffit donc de modifier h d'un facteur α adéquat pour aboutir à $\langle \pi, h \rangle = 1$.

L'existence de h tel que recherché est désormais démontrée.

Concernant l'unicité, si h et h' conviennent, alors on dispose de $\beta, \beta' \in \mathbb{R}_+^*$ tels que βh et $\beta' h'$ appartiennent à $\mathcal{P}$. Or le vecteur μ tel que $\mu M^\top = \lambda\mu$ est unique, donc h et h' sont colinéaires. Dès lors, l'égalité entre h et h' résulte de ce que $\langle \pi, h \rangle = \langle \pi, h' \rangle = 1$.

Question 12-c. L'inégalité de la question 10-a devient disponible, dans laquelle on fait tendre $n \to +\infty$. On obtient alors

$$\lambda^{-n} M^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left(h_i \frac{\mu_j}{h_j}\right)_{1\leq i,j\leq d}.$$

III Troisième partie

Question 13-a. Soit $y \in M_{1,d}(\mathbb{N})$ et $j \in [\![1; d]\!]$. Sous réserve d'existence, on écrit :

$$\begin{aligned} E(X_{n+1,j}\mathbb{I}_{X_n=y}) &= \sum_{i=1}^{d} E\left[\sum_{k=1}^{X_{n,i}} L_{i,j}^{n,k} \mathbb{I}_{X_n=y}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{y_i} E(L_{i,j}^{n,k} \mathbb{I}_{X_n=y}) \end{aligned}$$

Or, l'expression de X_n ne dépend que des variables $L_i^{p,k}$ avec $p \in [\![0; n-1]\!]$, donc, par lemme des coalitions :

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1,j}\mathbb{I}_{X_n=y}) &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{y_i} E(L_{i,j}^{n,k})E(\mathbb{I}_{X_n=y}) \\
&= \sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{y_i} E(N_{i,j})P(X_n = y) \\
&= \sum_{i=1}^{d} y_i M_{i,j} P(X_n = y) \\
&= (yM)_j \; P(X_n = y).
\end{aligned}$$

Comme les variables en jeu sont positives, le calcul légitime l'existence de l'espérance.

Question 13-b. Il suffit de sommer pour $y \in X_n(\Omega)$, sous réserve d'existence, en notant que

$$\sum_{y \in X_n(\Omega)} \mathbb{I}_{[X_n=y]} = 1.$$

Ainsi, pour $j \in [\![1; d]\!]$:

$$\begin{aligned}
x_{n+1,j} &= E(X_{n+1,j}) \\
&= \sum_{y \in X_n(\Omega)} E(X_{n+1,j}\mathbb{I}_{X_n=y}) \\
&= \sum_{y \in X_n(\Omega)} (yM)_j \; P(X_n = y) \\
&= \sum_{y \in X_n(\Omega)} (yM)_j \; P(X_n = y) \\
&= E((X_n M)_j) \text{ par théorème de transfert} \\
&= (x_n M)_j \text{ par linéarité de l'espérance.}
\end{aligned}$$

Le calcul est légitime pour les mêmes raisons que précédemment : tous les termes en jeu sont positifs.
Ceci étant vrai pour tout $j \in [\![1; d]\!]$, on a $x_{n+1} = x_n M$.

Question 14. On note que, pour tous $i, j \in \mathcal{I}$, $Y_i Y_j$ admet une espérance, puisque

$$|Y_i Y_j| \leq \frac{Y_i^2 + Y_j^2}{2}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\sum_{i\in\mathcal{I}} Y_i\right)^2\right] &= \sum_{i,j\in\mathcal{I}} E(Y_iY_j)\\
&= \sum_{i\neq j\in\mathcal{I}} E(Y_i)E(Y_j) + \sum_{i\in\mathcal{I}} E(Y_i^2) \text{ par indépendance}\\
&= \sum_{i\neq j\in\mathcal{I}} E(Y_i)E(Y_j) + \sum_{i\in\mathcal{I}} [Var(Y_i) + E(Y_i)^2]\\
&= \sum_{i,j\in\mathcal{I}} E(Y_i)E(Y_j) + \sum_{i\in\mathcal{I}} Var(Y_i)\\
&= \left(\sum_{i\in\mathcal{I}} E(Y_i)\right)^2 + \sum_{i\in\mathcal{I}} Var(Y_i).
\end{aligned}$$

Question 15-a. Soit $u \in M_{d,1}(\mathbb{R})$ et $y \in M_{1,d}(\mathbb{N})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, sous réserve d'existence :

$$\begin{aligned}
E(\langle X_{n+1}, u\rangle^2 \mathbb{I}_{X_n=y}) &= E\left[\left(\sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{y_i} u_j L_{i,j}^{n,k} \mathbb{I}_{X_n=y}\right)^2\right]\\
&= E\left[\left(\sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{y_i} u_j L_{i,j}^{n,k}\right)^2\right] E[\mathbb{I}_{X_n=y}]\\
&= E\left[\left(\sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{y_i} u_j L_{i,j}^{n,k}\right)^2\right] P(X_n = y)
\end{aligned}$$

par indépendance de l'événement $[X_n = y]$ vis-à-vis des variables aléatoires $L_{i,j}^{n,k}$.

Les variables $\displaystyle\sum_{j=1}^d u_j L_{i,j}^{n,k} \mathbb{I}_{X_n=y}$ sont indépendantes pour i et k variant. On peut donc utiliser l'identité montrée à la question 14 avec l'ensemble fini suivant :

$$\mathcal{I} = \left\{(i,k) \in \mathbb{N}^2 : i \in [\![1;d]\!] \text{ et } (\forall i \in [\![1;d]\!], k \in [\![1;y_i]\!])\right\}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
E(\langle X_{n+1}, u\rangle^2 \mathbb{I}_{X_n=y}) &= P(X_n = y)\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{y_i} E\left[\sum_{j=1}^d u_j L_{i,j}^{n,k}\right]\right)^2 + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{y_i} Var\left[\sum_{j=1}^d u_j L_{i,j}^{n,k}\right]\right]\\
&= P(X_n = y)\ \left[\left(\sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{y_i} \sum_{j=1}^d u_j M_{i,j}\right)^2 + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{y_i} Var\left[\sum_{j=1}^d u_j L_{i,j}\right]\right]\\
&= P(X_n = y)\ \left[\left(\sum_{i=1}^d y_i (Mu)_i\right)^2 + \sum_{i=1}^d y_i T(u)_i\right]\\
&= P(X_n = y)\ \left[\langle y, Mu\rangle^2 + \langle y, T(u)\rangle\right]
\end{aligned}$$

Tous ces calculs sont effectués sous réserve d'existence, mais celle-ci est légitimée par le fait que ces calculs aboutissent et concernent des variables aléatoires positives.

Question 15-b. Cette fois encore, on somme sur $y \in X_n(\Omega)$ l'égalité obtenue à la question précédente, en utilisant le théorème de transfert pour X_n :

$$E(\langle X_{n+1}, u\rangle^2) = E(\langle X_n, Mu\rangle^2) + E(\langle X_n, T(u)\rangle).$$

Or, par linéarité de l'espérance :

$$E(\langle X_n, T(u)\rangle = \langle E(X_n), T(u)\rangle$$

puis, $x_n = x_0 M^n$ en itérant la relation obtenue à la question 13-b.
Finalement :

$$E(\langle X_n, T(u)\rangle = \langle x_0 M^n, T(u)\rangle$$

ce qui donne la relation attendue.

Question 16. On démontre ceci par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, avec une initialisation évidente. Supposons l'égalité établie au rang $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. On repart du résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} E(\langle X_{n+1}, u\rangle^2) &= E(\langle X_n, Mu\rangle^2) + \langle x_0 M^n, T(u)\rangle \\ &= E(\left\langle X_0, M^{n+1}u\right\rangle^2) + \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle x_0 M^k, T(M^{n-1-k}Mu)\right\rangle + \langle x_0 M^n, T(u)\rangle \\ &= E(\left\langle X_0, M^{n+1}u\right\rangle^2) + \sum_{k=0}^{n} \left\langle x_0 M^k, T(M^{n-k}u)\right\rangle \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

IV Quatrième partie

Question 17. Reprenons les résultats du début de la seconde partie, aux questions 9, 10-a et 10-b. Avec ces résultats, on trouve un vecteur $\mu \in \mathcal{P}$, des constantes $C > 0$ et $\gamma \in [0;1[$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d} \left|\lambda^{-n}(M^n)_{i,j} - h_i \frac{\mu_j}{h_j}\right| \leq C\gamma^n$$

On trouve ensuite un unique vecteur $\pi \in \mathcal{P}$ tel que $\pi M = \lambda\pi$. Ce vecteur π, dans la réponse apportée à la question 10-b, est colinéaire au vecteur $\left(\frac{\mu_1}{h_1}, \ldots, \frac{\mu_d}{h_d}\right)$. Soit $\alpha > 0$ tel que $\pi = \alpha \cdot \left(\frac{\mu_1}{h_1}, \ldots, \frac{\mu_d}{h_d}\right)$.

Alors on obtient le résultat voulu en prenant ce vecteur π et en posant $h'_i = \frac{h_i}{\alpha}$, qui est bien > 0 pour tout $i \in [\![0; d]\!]$.

Question 18. On note que $E(\|X_n\|_1) = \sum_{k=1}^{d} x_{n,k} = x_n e$ où $e = (1, \dots, 1)^\top$. Ainsi :

$$E(\|X_n\|_1) = x_0 M^n e.$$

Or, la majoration de la question précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{d} \left|(M^n)_{i,j} - \lambda^n h'_i \pi_j\right| \leq C(\gamma\lambda)^n$$

Ceci montre que $(M^n)_{i,j} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tous $i, j \in [\![1; d]\!]$.
Ainsi $E(\|X_n\|_1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour le second résultat, les X_n sont à valeurs dans $\mathbb{N}^d$. On a, par inégalité de Markov, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [X_k \neq 0]\right) \leq P(X_n \neq 0) \leq P(\|X_n\|_1 \geq 1) \leq E(\|X_n\|_1)$$

En faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient $P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [X_k \neq 0]\right) = 0$. Ainsi, l'événement $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [X_k = 0]$ est presque sûr, ce qui donne le résultat.

Question 19-a. Soit $u \in M_{d,1}(\mathbb{R})$. On a $T(u)_i = Var(\langle L_i, u\rangle)$ pour tout $i \in [\![1; d]\!]$. Or, pour tout $i \in [\![1; d]\!]$,

$$Var(\langle L_i, u\rangle) \leq E(\langle L_i, u\rangle^2) \leq E(\|L_i\|_2^2)\|u\|_2^2$$

(on a appliqué successivement la formule de Koenig-Huygens et l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

En posant $c_0 = \sum_{i=1}^{d} E(\|L_i\|_2^2)$, on obtient bien

$$\forall u \in M_{d,1}(\mathbb{R}), \ \|T(u)\|_1 = \sum_{i=1}^{d} Var(\langle L_i, u\rangle) \leq c_0 \|u\|_2^2.$$

Question 19-b. Il suffit de noter que, pour tout $u \in M_{d,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\|u\|_2^2 = \sum_{i=1}^{d} u_i^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq d} |u_i||u_j| = \left(\sum_{k=1}^{d} |u_k|\right)^2$$

Ainsi, en reprenant $c_1 = c_0$, on obtient

$$\forall u \in M_{d,1}(\mathbb{R}), \ \|T(u)\|_1 \leq c_1 \|u\|_1^2.$$

Remarque : on pouvait aussi utiliser l'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^d$.

Question 20-a. Soit $u \in M_{d,1}(\mathbb{R})$ tel que $\langle \pi, u\rangle = 0$. En particulier, on a

$$\forall i \in [\![1; d]\!], \sum_{j=1}^{d} \lambda^n h'_i \pi_j u_j = 0.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\|M^n u\|_1 &= \sum_{i=1}^{d} \left| \sum_{j=1}^{d} (M^n)_{i,j} u_j - \sum_{j=1}^{d} \lambda^n h'_i \pi_j u_j \right| \\
&= \sum_{i=1}^{d} \left| \sum_{j=1}^{d} \left((M^n)_{i,j} - \lambda^n h'_i \pi_j \right) u_j \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \left| (M^n)_{i,j} - \lambda^n h'_i \pi_j \right| |u_j| \\
&\leq \lambda^n \|u\|_1 \ \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \left| \lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - h'_i \pi_j \right| \\
&\leq C\ (\lambda\gamma)^n\ \|u\|_1.
\end{aligned}$$

Question 20-b. On va utiliser conjointement les résultats des questions 16, 19-b et 20-a. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u \in M_{d,1}(\mathbb{R})$ avec $\langle \pi, u\rangle = 0$. On part de l'égalité suivante :

$$E(\langle X_n, u\rangle^2) = E(\langle X_0, M^n u\rangle^2) + \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle x_0 M^k, T(M^{n-1-k} u) \right\rangle$$

Tout d'abord, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$E(\langle X_0, M^n u\rangle^2) \leq \|M^n u\|_2^2 \cdot E(\|X_0\|_2^2)$$

Par équivalence des normes dans $\mathbb{R}^d$, et en utilisant 20-a, on dispose d'une première constante K_1 (indépendante de n et de u) telle que

$$E(\langle X_0, M^n u\rangle^2) \leq K_1 (\lambda\gamma)^{2n} \|u\|_1^2.$$

Il faut désormais s'occuper des termes de la somme. On fixe $k \in [\![0; n-1]\!]$ et on décompose :

$$x_0 = \alpha\pi + u_0$$

décomposition sur la somme directe orthogonale $\mathbb{R} \cdot \pi \oplus (\mathbb{R} \cdot \pi)^{\perp}$.
Alors :

$$\begin{aligned}
| \left\langle x_0 M^k, T(M^{n-1-k} u) \right\rangle | &\leq |\alpha \left\langle \pi M^k, T(M^{n-1-k} u \right\rangle | + |\beta \left\langle u_0 M^k, T(M^{n-1-k} u \right\rangle | \\
&\leq \lambda^k\ |\alpha \left\langle \pi, T(M^{n-1-k} u \right\rangle | + |\beta \left\langle u_0 M^k, T(M^{n-1-k} u \right\rangle |
\end{aligned}$$

Pour le second terme, on peut effectuer la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
| \left\langle u_0 M^k, T(M^{n-1-k} u) \right\rangle | &\leq \|u_0 M^k\|_1 \cdot \|T(M^{n-1-k} u)\|_1 \text{ car composantes positives} \\
&\leq C (\lambda\gamma)^k \|u_0\|_1 \cdot c_1 \|M^{n-1-k} u\|_1^2
\end{aligned}$$

et on utilise alors 20-a pour obtenir une nouvelle constante K_2, indépendante de n, de u et de k, telle que

$$|\left\langle u_0 M^k, T(M^{n-1-k}u)\right\rangle| \leq K_2 \cdot \|u\|_1^2 \cdot \lambda^{2n-k}\gamma^{2n-k}$$

(en l'occurrence : $K_2 = C^2 \times (\lambda\gamma)^{-2} \times c_1$).

On peut reprendre les mêmes idées pour majorer le terme $|\alpha \left\langle \pi, T(M^{n-1-k}u\right\rangle|$:

$$\begin{aligned} |\alpha \left\langle \pi, T(M^{n-1-k}u)\right\rangle| &\leq |\alpha| \cdot \|\pi\|_1 \cdot \|T(M^{n-1-k}u)\|_1 \\ &\leq |\alpha| \cdot c_1 \|M^{n-1-k}u\|_1^2 \\ &\leq K_3 \cdot \|u\|_1^2 \cdot \lambda^{2n-2k}\gamma^{2n-2k} \end{aligned}$$

où K_3 est une constante réelle positive.

Comme $\gamma^{2n-2k} \geq \gamma^{2n-k}$, on obtient

$$\begin{aligned} |\left\langle x_0 M^k, T(M^{n-1-k}u)\right\rangle| &\leq \|u\|_1^2 (K_3 + |\beta| K_2 \gamma^k)\lambda^{2n-k}\gamma^{2n-2k} \\ &\leq \|u\|_1^2 (K_3 + |\beta| K_2)\lambda^{2n-k}\gamma^{2n-2k} \end{aligned}$$

On pose alors $C_1 = K_1 + |\beta|K_2 + K_3$ et on obtient, pour tous $u \in M_{d,1}(\mathbb{R})$ avec $\langle \pi, u\rangle = 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$E(\langle X_n, u\rangle^2) \leq C_1 \|u\|_1^2 \left(\lambda^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-k}\gamma^{2n-2k} + (\lambda\gamma)^{2n}\right).$$

Question 21-a. Il s'agit du produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geq 1} \lambda^{-n}$ et $\sum_{n\geq 1} \gamma^{2n}$, qui convergent toutes les deux (absolument). On trouve donc que la série de terme général $\sum_{k=0}^{n} \lambda^{-k}\gamma^{2(n-k)}$ converge, donc celle proposée par l'énoncé également (puisque le terme général est à un facteur γ^2 près).

Question 21-b. On calcule le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle w - \|w\|_1 \pi, \pi\rangle &= \sum_{i=1}^{d} w_i \pi_i - \sum_{i=1}^{d} w_i \sum_{j=1}^{d} \pi_j^2 \\ &= \sum_{i=1}^{d} w_i \left(\pi_i - \sum_{j=1}^{d} \pi_j^2\right) \\ &= \left\langle w, \pi - \|\pi\|_2^2 e_0\right\rangle. \end{aligned}$$

Concernant l'orthogonalité :

$$\left\langle \pi - \|\pi\|_2^2 e_0, \pi\right\rangle = \|\pi\|_2^2 - \|\pi\|_2^2 \langle \pi, e_0\rangle$$

avec $\langle \pi, e_0 \rangle = 1$ car $\pi \in \mathcal{P}$.

Question 21-c. Fixons $n \in \mathbb{N}$. On décompose X_n sur une base orthonormée $(u_1, \ldots, u_d)$ de $\mathbb{R}^d$ avec u_1 positivement colinéaire à π. On dispose donc de $\alpha > 0$ (indépendant de n) tel que $u_1 = \alpha\pi$.
On a alors $\|W_n\|_2^2 = \lambda^{-2n} \left(\langle X_n - \|X_n\|_1 \pi, \alpha\pi \rangle^2 + \sum_{i=2}^{d} \langle X_n, u_i \rangle^2 \right)$ si bien que :

$$E(\|W_n\|_2^2) = \lambda^{-2n} \cdot E(\langle X_n - \|X_n\|_1 \pi, \alpha\pi \rangle^2) + \lambda^{-2n} \cdot \sum_{i=2}^{d} E(\langle X_n, u_i \rangle^2)$$

La majoration de la question 20-b (applicable, car $u_i \perp \pi$ pour tout $i \in [\![2; d]\!]$) et la convergence de la question 21-a montrent que la série de terme général $\lambda^{-2n} E(\langle X_n, u_i \rangle^2)$ converge pour tout $i \in [\![2; d]\!]$.
Il reste à nous occuper du premier terme. Or d'après le résultat de la question 21-b,

$$\lambda^{-2n} \cdot E(\langle X_n - \|X_n\|_1 \pi, \alpha\pi \rangle^2) = \alpha^2 \lambda^{-2n} \cdot E(\langle X_n, \pi - \langle \pi, \pi \rangle e_0 \rangle^2)$$

Comme le vecteur $\pi - \langle \pi, \pi \rangle e_0$ est orthogonal à π, la majoration de la question 20-b s'applique à nouveau, ce qui entraîne la convergence de la série de terme général $\lambda^{-2n} \cdot E(\langle X_n - \|X_n\|_1 \pi, \alpha\pi \rangle^2)$.

Par combinaison linéaire, la série de terme général $E(\|W_n\|_2^2)$ converge. Il en découle directement que $E(\|W_n\|_2^2) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Question 21-d. On utilise l'inégalité de Markov, pour $\varepsilon > 0$:

$$P(\|W_n\|_2 \geq \varepsilon) = P(\|W_n\|_2^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(\|W_n\|_2^2)}{\varepsilon^2}$$

et on fait tendre $n \to +\infty$ en utilisant la conclusion de la question précédente.

Question 22. On s'intéresse à l'événement $A_\varepsilon = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq m} [\|W_k\|_2 \geq \varepsilon]$, pour $\varepsilon > 0$. On note que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(\|W_k\|_2 \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\|W_k\|_2^2)}{\varepsilon^2}$$

ce qui montre que la série de terme général $P(\|W_k\|_2 \geq \varepsilon)$ converge, d'après le résultat de la question 21-c.
Ainsi, comme

$$P\left(\bigcup_{k \geq m} [\|W_k\|_2 \geq \varepsilon] \right) \leq \sum_{k=m}^{+\infty} P(\|W_k\|_2 \geq \varepsilon)$$

on a donc que $P\left(\bigcup_{k \geq m} [\|W_k\|_2 \geq \varepsilon] \right) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, par continuité décroissante, $P(A_\varepsilon) = 0$.

Pour conclure, on séquentialise le problème en appliquant le résultat ci-dessus à $\varepsilon = 2^{-N}$ pour $N \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$P(\lim_{n \to +\infty} W_n = 0) = P\left(\overline{\bigcup_{N>0} A_{2^{-N}}}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{N>0} \overline{A_{2^{-N}}}\right)$$

Or l'événement $\bigcap\limits_{N>0} \overline{A_{2^{-N}}}$ est une intersection d'événements presque sûrs, donc

$$P(\lim_{n\infty} W_n = 0) = 1.$$