# Physique

## TP 11 – Pendule pesant

25 mars, 8 avril 2024

## Objectifs

— Utiliser un capteur angulaire.
— Observer les paramètres dont dépend la période du mouvement.
— Tracer et analyser un portrait de phase.

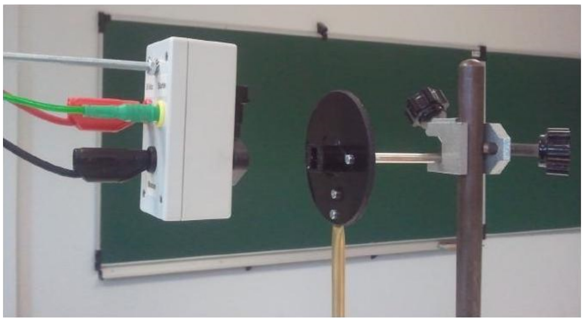
## Compétences à acquérir

- Réaliser l'étude d'un pendule pesant et mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique.
- Mesurer une masse, un moment d'inertie ; repérer la position d'un centre de masse et mesurer un moment d'inertie à partir d'une période et de l'application de la loi de Huygens fournie.

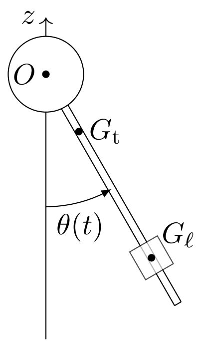
## 1 Présentation du dispositif

Dans ce TP, les oscillations d'un pendule pesant sont étudiées. Un tel pendule est constitué d'une tige légère sur laquelle un cylindre massif (appelé « lest » dans la suite) peut être déplacé à volonté, permettant ainsi de faire varier le moment d'inertie du pendule. La tige est également équipée d'une plaque de plastique (appelée « aérofrein » dans la suite) de grande surface mais très légère, permettant de moduler l'intensité des frottements avec l'air ambiant selon l'angle formé par cette plaque avec le plan du mouvement.

La tige tourne autour d'un axe horizontal $\Delta$, passant par $O$. Sa position est repérée par l'angle $\theta$ qu'elle forme avec la verticale ; cet angle est mesuré à l'aide d'un capteur angulaire sans contact, figure 1a, constitué :
— d'une partie mobile, équipée d'un aimant et solidaire de la tige en rotation ;
— d'une partie fixe, constituant la partie sensible du capteur, solidaire d'un boitier de raccordement électrique et immobilisée sur une potence.



**(a)** *Le dispositif utilisé.*




**(b)** *Schéma du pendule pesant.*

**Figure 1**

⚠ *Pour assurer le bon fonctionnement du capteur, la couche d'air* entre les deux parties *du capteur doit être inférieure à quelques millimètres (non respecté sur la figure 1a à des fins d'illustration) et la distance* entre les axes *de ces deux parties ne doit pas excéder* 3 mm. *De plus, le capteur doit être alimenté par une tension continue de* 5 V, *cette valeur* ***devant absolument ne pas être dépassée*** *sous peine de destruction du capteur.*

Dans ces conditions, la tension en sortie de capteur est une fonction affine de l'angle $\theta$.

## 2 Étude théorique du pendule pesant

Les notations utilisées sont données dans le tableau 1.

| Grandeur | Tige seule | Lest |
|---|---|---|
| Masse | $m$ | $M$ |
| Moment d'inertie / $\Delta$ | $J_\mathrm{t}$ | $J_\ell$ |
| Barycentre | $G_\mathrm{t}$ | $G_\ell$ |
| Position barycentre | $\ell = OG_\mathrm{t}$ | $L = OG_\ell$ |

**Tableau 1 –** *Notations utilisées.*

**1.** Appliquer le théorème du moment cinétique au pendule en négligeant tout frottement. En déduire que l'angle $\theta$ vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \tag{1}$$

et exprimer la pulsation propre $\omega_0$ en fonction des paramètres $m$, $M$, $\ell$, $L$, $J_\mathrm{t}$, $J_\ell$ et $g$ l'accélération de pesanteur.

**2.** En assimilant le lest à un objet ponctuel, exprimer $J_\ell$ en fonction de $M$ et $L$.

**3.** En déduire l'expression de la période $T_0$ des petites oscillations en fonction de $m$, $M$, $\ell$, $L$, $J_\mathrm{t}$ et $g$.

## 3 Étude expérimentale

### 3.1 Installation

► Vérifier que les deux parties du capteur angulaire satisfont les contraintes de position données en partie 1 et que les deux potences supportant chacune des parties du capteur sont reliées entre elles par une tige solidement fixée.

► Alimenter la partie électrique du capteur grâce à l'alimentation présente sur l'interface Sysam, en utilisant les bornes « masse » et « +5 V ». La borne « Sortie » du capteur doit être reliée à une des entrées de l'interface, de manière à mesurer cette tension $u$ par rapport à la masse.

► Placer le lest à l'extrémité inférieure de la tige du pendule et l'aérofrein dans un plan parallèle à celui du mouvement, le plus haut possible sur la tige, de façon à minimiser les frottements fluides.

> ⚠ *Vérifier que le lest est bien solidaire de la tige et qu'il ne risque pas de se mettre à glisser lors des oscillations du pendule.*

► Paramétrer le logiciel LatisPro pour faire une acquisition de la tension issue du capteur et tester le bon fonctionnement de l'ensemble en faisant osciller le pendule.

▷ La tension $u$ visualisée doit être à l'image des oscillations du pendule.

### 3.2 Étalonnage

La tension $u$ disponible en sortie de capteur est une fonction affine de l'angle $\theta$. Un étalonnage est nécessaire pour déterminer cette fonction.

► Relever la valeur $u_0$ de la tension $u$ lorsque le pendule est à l'équilibre ($\theta = 0$) en mesurant $u$ pendant quelques secondes puis en moyennant.

► À l'aide d'une potence annexe, immobiliser la tige du pendule parfaitement à l'horizontale.

▷ Mesurer pour cela la distance entre la tige et la table à l'aide d'un mètre-ruban.

▷ Relever alors la valeur $u_{90}$ de la tension $u$ dans cette position du pendule ($|\theta| = 90°$).

**4.** Déterminer la relation donnant $\theta$ (en degrés) en fonction de $u$ et des grandeurs $u_0$ et $u_{90}$, sous forme littérale.

► Entrer cette relation dans une feuille de calcul (`F3`) et afficher la courbe $\theta(t)$.

### 3.3 Non-isochronisme des oscillations

La résolution approchée de l'équation (1) dans le cas d'angles quelconques [1] montre que les oscillations obtenues ne sont pas sinusoïdales et que leur période $T$ dépend de l'amplitude $\theta_{\text{max}}$ des oscillations et de la période propre $T_0$ du pendule.

Pour $\theta_{\text{max}} \leqslant \frac{\pi}{2}$, $T \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_{\text{max}}^2}{N}\right)$ avec $\theta_{\text{max}}$ exprimé en radians et $N$ un entier. Il s'agit de la formule de Borda. L'objectif ici est de déterminer expérimentalement la valeur de $N$.

▶ Mesurer la valeur de la période d'oscillation du pendule pour différentes valeurs d'amplitude des oscillations, en respectant $\theta_{\text{max}} \leqslant \frac{\pi}{2}$.

▷ Prendre *beaucoup* de mesures, pas seulement 3 ou 4.

▶ Entrer vos mesures dans deux tableaux `numpy` avec Python.

▶ Que valent les demi-largeurs des plages de variabilité de $T$ et $\theta_{\text{max}}$ ?

**5.** Comment, en traçant $T$ en fonction de $\theta_{\text{max}}^2$, la valeur de $N$ peut-elle être obtenue ?

**6.** Écrire un script Python s'appuyant sur une méthode de type Monte-Carlo pour trouver la valeur moyenne de $N$ et son incertitude-type.

### 3.4 Déplacement du lest

Dans cette partie, l'étude porte sur la modification de la période des oscillations en fonction du déplacement du lest le long de la tige. Pour cela, rester dans le cadre des petits angles et sans changer la position de l'aérofrein (frottements négligés).

**7.** Rappeler l'expression de $T_0^2$ en fonction de $m$, $M$, $\ell$, $L$, $J_{\text{t}}$ et $g$ trouvée dans l'étude théorique. Cette expression sera notée (2) dans la suite.

#### 3.4.1 Relevé de valeurs

▶ Mesurer la valeur de la période d'oscillation $T_0$ du pendule pour différentes positions (une dizaine au moins) du lest le long de la tige, repérées par la valeur de $L$.

▶ Mesurer également la valeur de la période d'oscillation $T_{\text{vide}}$ du pendule en absence de lest.

▶ Mesurer la masse $M$ du lest à l'aide d'une balance.

L'expression (2) montre qu'il n'est pas possible de trouver de jeu de variables $(X, Y)$ permettant d'obtenir un graphe sous forme de droite. Des hypothèses simplificatrices doivent être formulées.

#### 3.4.2 Hypothèse 1

« L'influence de la tige sur le pendule est négligeable par rapport à celle du lest, c'est-à-dire $m\ell \ll ML$ et $J_{\text{t}} \ll J_\ell$. »

**8.** Donner la nouvelle expression de $T_0^2$, notée (3), en fonction de $L$ et $g$.

**9.** Dans quel repère $Y_1 = f(X_1)$ faut-il placer les points expérimentaux de façon à obtenir une droite ?

▶ Tracer ce graphe et vérifier la validité de l'hypothèse 1. Conclure.

#### 3.4.3 Hypothèse 2

Seule l'hypothèse $m\ell \ll ML$ est retenue par rapport à l'hypothèse 1.

**10.** Donner la nouvelle expression de $T_0^2$, notée (4), en fonction de $M$, $L$, $J_{\text{t}}$ et $g$.

**11.** Dans quel repère $Y_2 = f(X_2)$ faut-il placer les points expérimentaux de façon à obtenir une droite ?

1. Et donc des angles qui ne sont pas nécessairement petits.

▶ Tracer ce graphe et vérifier la validité de l'hypothèse 2.

▶ Déduire de ces mesures la valeur approchée de $J_\mathrm{t}$, puis de $m\ell$ en utilisant les résultats en l'absence de lest.

### 3.5 Portrait de phase

✎ **Rappel** *Le portrait de phase est la représentation de $\dot{\theta}$ en fonction de $\theta$.*

▶ Placer à nouveau le lest sur la tige, le plus bas possible.

▶ Tracer le portait de phase du pendule peu amorti (aérofrein toujours parallèle au plan d'oscillation) d'une part dans le cas de petits mouvements, d'autre part dans le cas de mouvements de grande amplitude.

▶ Tracer le portait de phase du pendule fortement amorti (aérofrein perpendiculaire au plan d'oscillation et placé le plus bas possible sur la tige) dans le cas d'un mouvements de grande amplitude initiale.

▶ Quelle(s) information(s) nouvelle(s) apporte(nt) cette représentation ?