Physique

Capacité numérique 4 – Champ de force centrale conservatif

Pour le mercredi 10 avril 10:00

Pour rendre vos travaux (1 rendu par groupe de 3 maximum) :
- *les réponses aux questions « classiques » **par écrit** ;*
- *les codes à envoyer par mail à `l.torterotot.edu@gmail.com` au format*

  `CN-Trajectoires_F_ctr-X.py`

  en remplaçant `X` par le ou les noms des auteurs du code.

Objectifs

- À l'aide d'un langage de programmation, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.
- Utiliser la fonction `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate`.
- Transformer une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel de n équations d'ordre 1.

1 Étude préliminaire

Commençons par étudier le mouvement d'un point matériel de masse m soumis au potentiel keplerien

$$E_{\mathrm{p}}(r) = \frac{K}{r} = \frac{km}{r}$$

avec r la distance entre ce point matériel et l'origine du repère.

1. Déterminer l'expression de la force $\vec{F}$ dérivant de ce potentiel.

2. Quelle est l'expression de K dans le cas du mouvement d'une planète autour du Soleil ?

Dans le cas d'une force centrale, le mouvement est contenu dans un plan défini à tout instant par $\overrightarrow{OM}$ le vecteur position de M le point matériel étudié par rapport à O le centre attracteur et $\vec{v}$ la vitesse de M dans le référentiel lié à O supposé galiléen.

3. Déterminer, en coordonnées cylindriques, les expressions de la position, de la vitesse et de l'accélération d'un point matériel M.

4. Déterminer, grâce au principe fondamental de la dynamique, deux équations différentielles régissant le mouvement de ce point matériel.

5. Déterminer fonction F de $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ traduisant ces deux équations sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(X)\,, \quad X = \left(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}\right) .$$

2 Mise en œuvre

La bibliothèque `scipy.integrate` comporte une fonction `odeint` dont la documentation complète est disponible en ligne [1]. Pour un système tel que $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(X)$ avec X pouvant être un vecteur, son utilisation peut être simplifiée, avec les lignes nécessaires en amont, en

1. https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html

```python
from scipy.integrate import odeint # import de la fonction
X0 = (theta_init, omega_init) # le vecteur X à l'instant initial, comme avant
temps = ... # la liste des instants t auxquels obtenir X(t)
X_liste = odeint(F, X0, temps)
```

avec `F` une fonction qui prend deux paramètres, `X` et `temps`.

1. Écrire le code définissant la fonction `F1`, prenant comme paramètres la valeur `X` de $X(t_i)$ et la valeur `t` de t_i et qui rend $F(X(t_i))$ dans le cas étudié précédemment en définissant $k = -1$ dans la fonction `F1`.

2. Déterminer un jeu de conditions initiales (c'est-à-dire les coordonnées de $X(t = 0)$) pour avoir une trajectoire circulaire de rayon $r = 1$.

3. Tracer alors dans le plan du mouvement la trajectoire suivie par le point M. Pour cela, déterminer le temps pour pouvoir fermer la trajectoire, en déduire la variable `temps` à compléter sous la forme :
`temps = np.linspace(0, ..., 1000)`
Placer également le point correspondant à O. Sauvegarder le tracé de cette simulation dans une image « `fig1.png` ».

> ✎ *Pour obtenir des axes « x » et « y » normés, utiliser la ligne*
> `plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')`
> *juste avant de sauvegarder la figure.*

4. Tracer, dans « `fig2.png` », la trajectoire obtenue avec des conditions initiales similaires, même valeur de r mais une vitesse est diminuée de 10 %.

5. Rappeler les expressions des vitesses cosmiques. En déduire la vitesse minimale pour partir à l'infini du point $(1, 0)$ avec une vitesse orthoradiale (selon $\vec{e}_\theta$).

6. Tracer, dans « `fig3.png` », la trajectoire obtenue pour une vitesse égale à celle de libération. Vérifier que pour une vitesse inférieure, le point matériel reste dans un état lié. Prendre pour cela une vitesse inférieure de 5 % et tracer sur un temps suffisamment long pour voir que la trajectoire est fermée dans ce cas.

3 Potentiel différent

Considérons à présent, toujours pour un point matériel de masse m, un potentiel de la forme

$$E_\mathrm{p}(r) = \begin{cases} mk\ln(r/R)\,, & \text{si } r \in [0{,}1\,R; R] \\ 0\,, & \text{si } r > R \end{cases}$$

avec k et R des constantes.

1. Déterminer l'expression de la force $\vec{F}$ dérivant de ce potentiel.

2. En déduire le code définissant la fonction `F2`, prenant comme paramètres la valeur `X` de $X(t_i)$ et la valeur `t` de t_i et qui rend $F(X(t_i))$ dans le cas étudié ici en définissant $k = +1$ dans la fonction `F2`.

Calculer la vitesse que doit avoir un point matériel pour être en orbite circulaire de rayon r dans ce potentiel. Commenter.

Figure	$r(0)$	$\dot{r}(0)$	$\theta(0)$	$\dot{\theta}(0)$
`fig4a.png`	2,9	0	0	0,125
`fig4b.png`	1	0	0	1
`fig4c.png`	2	0	0	0,25

Tableau 1 – *Jeux de conditions initiales à utiliser.*

3. Pour $k = 1$ et les conditions initiales du tableau 1, tracer dans les figures respectives les trajectoires obtenues. Prendre pour cela `temps = np.linspace(0, 200, 5000)`.

4. Commenter en comparant aux trajectoires habituellement obtenues dans le cas du potentiel keplerien.