CALCUL DIFFÉRENTIEL (Partie 2)
FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Cours

Dans tout ce chapitre, p désigne un entier naturel non nul (dans la pratique, p sera égal à 2 ou 3).

On s'intéresse ici aux fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$f : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ ou en écrivant x dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, $f : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & f(x_1, \dots, x_p). \end{array}$
On dit que f est une *fonction de p variables réelles.*

Lorsque $p = 2$, on rappelle que l'on peut représenter graphiquement $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ dans l'espace par la surface d'équation $z = f(x, y)$ pour $(x, y) \in U$.

Ce sont des fonctions entre espaces vectoriels normés de dimension finie ($\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}$) donc les notions de limite et continuité vues dans le chapitre Espaces vectoriels normés s'appliquent à ces fonctions.

Notons que l'on pourrait plus généralement étudier les fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ mais l'étude d'une telle fonction revenant à l'étude de ses fonctions coordonnées dans une base de $\mathbb{R}^n$ (par exemple la base canonique), il suffit de maîtriser le cas $n = 1$.

On désignera par $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^p$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

I. Calcul différentiel du premier ordre

Dans tout ce paragraphe, on considère une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ avec U ouvert.

A. Dérivée selon un vecteur

Soit $a \in U$. Soit $v \in \mathbb{R}^p$ avec $v \neq 0_{\mathbb{R}^p}$.

Comme U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_o(a, r) \subset U$.
Notons que pour tout $t \in \left] -\frac{r}{\|v\|}, \frac{r}{\|v\|} \right[$, on a $\|a + tv - a\| = |t|\|v\| < r$ donc $a + tv \in B_o(a, r)$ donc $a + tv \in U$.
On peut donc définir :

$$f_{a,v} : \begin{array}{ccc} \left] -\frac{r}{\|v\|}, \frac{r}{\|v\|} \right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a + tv). \end{array}$$

Définition 1

Soit $a \in U$. Soit $v \in \mathbb{R}^p$ avec $v \neq 0_{\mathbb{R}^p}$.
On dit que f *admet une dérivée au point a selon le vecteur v* lorsque $f_{a,v} : t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0.
On appelle alors *dérivée de f au point a selon le vecteur v* et on note $D_v f(a)$ le réel $f'_{a,v}(0)$.

Lorsque la dérivabilité de la fonction $f_{a,v}$ en 0 ne peut pas s'obtenir par les théorèmes généraux, on reviendra à la définition de la dérivabilité.
On notera l'équivalence :

$$f \text{ admet une dérivée en } a \text{ selon } v \iff \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, on a $D_v f(a) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t}$.

Exemple 1 : On considère la fonction $f : (x, y, z) \mapsto \cos(xy^2 + 3z)$.

1. Montrer que f admet une dérivée au point $(1, 1, 1)$ selon le vecteur $(0, -1, 1)$ et la déterminer.
2. Montrer que f admet une dérivée en tout point selon tout vecteur non nul.

Exemple 2 : On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
La fonction f admet-elle des dérivées au point $(0, 0)$ selon les vecteurs $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$?
Si oui, les déterminer.

B. Dérivées partielles

Dans la suite, on note $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Définition 2

Soit $a \in U$. Soit $i \in [\![1, p]\!]$.
On dit que f *est dérivable en a par rapport à sa i-ème variable* lorsqu'elle admet une dérivée au point a selon le vecteur e_i.
On appelle alors *dérivée partielle de f en a par rapport à la i-ème variable* et on note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $\partial_i f(a)$ le réel $D_{e_i} f(a)$.

Exemple 2 (suite) :

1. Montrer que f admet des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y en $(0, 0)$ et les déterminer.
2. La fonction f est-elle continue au point $(0, 0)$?

- On notera qu'une fonction peut admettre des dérivées partielles en un point sans y être continue.

- Notons $a = (a_1, \ldots, a_p)$.

On notera qu'

$$\text{étudier la dérivabilité de } f \text{ en } a \text{ par rapport à sa } i\text{-ème variable}$$

est équivalent à

$$\text{étudier la dérivabilité de } t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_p) \text{ en } 0$$

ou encore à

$$\text{étudier la dérivabilité de } x \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_p) \text{ en } a_i.$$

Définition 3

Soit $i \in [\![1,p]\!]$.
On suppose que f est dérivable par rapport à sa i-ème variable en tout point de U.
On appelle *dérivée partielle d'ordre* 1 *de* f *par rapport à la* i*-ème variable* la fonction :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \end{array}$$

- Si elles existent toutes, il y a p dérivées partielles de f et ce sont des fonctions de p variables.

- *Dans la pratique :* pour étudier la dérivée partielle de f par rapport à sa i-ème variable, lorsque les théorèmes généraux le permettent, on dérive l'expression en considérant que la seule variable est x_i et que les autres variables sont des paramètres constants. Pour les points problématiques, on passe par la définition et éventuellement le taux d'accroissement.

Exemple 3 : Soit $f : (x,y) \mapsto x\sqrt{x^2+y^2}$.
Étudier les dérivées partielles de f par rapport à chacune de ses variables.

C. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

1. Définitions

Définition 4

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U lorsque toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues sur U.

On note $\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$.

Définition 5

Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$. Soit $a \in U$.
On appelle *gradient de* f *au point* a et on note $\nabla f(a)$ le vecteur :

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_p f(a)).$$

Définition 6

Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$. Soit $a \in U$.
On appelle *différentielle de* f *en* a et on note $df(a)$ l'application linéaire :

$$df(a) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (h_1,\dots,h_p) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^p \partial_i f(a) h_i = \langle \nabla f(a), h \rangle. \end{array}$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}^p$, $df(a)(h)$ est plutôt noté $df(a) \cdot h$.

2. Développement limité d'ordre 1

Théorème 7

Si $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ alors f admet en tout point a de U un *développement limité d'ordre* 1. Pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ vérifiant $a+h \in U$, on a :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)\cdot h + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|).$$

Ce développement limité peut aussi s'écrire :

$$\text{Pour tout } x \in U, f(x) = f(a) + df(a)\cdot(x-a) + \underset{x\to a}{o}(\|x-a\|).$$

Lorsque $p = 2$, au point $(x_0, y_0) \in U$, on obtient :

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}(\|(h,k)\|).$$

Graphiquement, $z - z_0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$ est l'équation du *plan tangent* en (x_0,y_0) à la surface d'équation $z = f(x,y)$.

Corollaire 8

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors f est continue sur U.

Corollaire 9

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors f admet une dérivée en tout point a de U selon tout vecteur v de $\mathbb{R}^p$ non nul et on a :

$$D_v f(a) = df(a)\cdot v.$$

Interprétation géométrique du gradient : Soit $a \in U$ tel que $\nabla f(a) \neq (0,\dots,0)$.
Soit v un vecteur unitaire. On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v\rangle \leqslant \|\nabla f(a)\|.\|v\| = \|\nabla f(a)\|$$

avec égalité si et seulement si v et $\nabla f(a)$ sont colinéaires et de même sens.
Ainsi, $D_v f(a)$ est maximale lorsque $v = \dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$.

3. Opérations

Proposition 10

- Si $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$.
- Si $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ alors $fg \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$
  et si de plus g ne s'annule pas sur U alors $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
  Si $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ avec $f(U) \subset I$ alors $\varphi \circ f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$.

▸ $\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(U,\mathbb{R})$.

Exemple : Les fonctions coordonnées $p_i : (x_1,\dots,x_p) \mapsto x_i$ (pour $i \in [\![1,p]\!]$) sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$. On en déduit que les fonctions polynômiales sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$ et les fractions rationnelles (quotients de deux fonctions polynômiales) dont le dénominateur ne s'annule pas sur U sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

▸ Dans la pratique, on passe souvent par le caractère $\mathscr{C}^1$ pour justifier l'existence de toutes les dérivées partielles et les calculs effectués.

Exemple 4 : La fonction $\psi : (x,y) \mapsto \begin{cases} x^2y^2\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exemple 5 : On munit l'espace $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Montrer que l'application $N : x \mapsto \|x\|$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{(0,\dots,0)\}$.
2. Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$?
3. Calculer $\nabla N(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,\dots,0)\}$.

4. Règle de la chaîne

Théorème 11 (*Dérivée de* $g : t \mapsto f(x_1(t),\dots,x_p(t))$)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $x_i \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et pour tout $t \in I$, $(x_1(t),\dots,x_p(t)) \in U$ alors $g : t \mapsto f(x_1(t),\dots,x_p(t)) \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ et on a pour tout $t \in I$:

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(x_1(t),\dots,x_p(t)).x_i'(t).$$

En d'autres termes, pour tout $t \in I$, $g'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t),\dots,x_p(t))\frac{dx_i}{dt}(t)$.

Exemple 6 : Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$.
Montrer que $g : t \mapsto f(1-t, t^2, 2e^{-t})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer g'.
Expliciter g' dans le cas particulier $f : (x,y,z) \mapsto xye^z$.

Exemple 7 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $\gamma \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}^2)$. On suppose que $\gamma(I) \subset U$.

1. Montrer que $f \circ \gamma \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ et pour tout $t \in I$, $(f\circ\gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle *ligne de niveau* λ l'ensemble :

$$\mathscr{C}_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \lambda\}.$$

   (a) Représenter des lignes de niveau de la fonction $(x,y) \mapsto x^2+y^2$.
   En déduire sa représentation graphique.
   (b) On suppose que l'on peut paramétrer $\mathscr{C}_\lambda$ par γ c'est-à-dire $\mathscr{C}_\lambda = \{\gamma(t),\ t \in I\}$.
   Soit $a \in \mathscr{C}_\lambda$. Montrer que $\nabla f(a)$ est orthogonal à $\mathscr{C}_\lambda$.

Corollaire 12 (*Dérivées partielles de* $(u_1,\dots,u_n)\mapsto f(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_p(u_1,\dots,u_n))$)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
Si pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $x_i\in\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $f\in\mathscr{C}^1(V,\mathbb{R})$ avec pour tout $(u_1,\dots,u_n)\in U$, $(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_p(u_1,\dots,u_n))\in V$ alors

$$g:(u_1,\dots,u_n)\mapsto f(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_p(u_1,\dots,u_n))\in\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$$

et on a pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, pour tout $(u_1,\dots,u_n)\in U$:

$$\frac{\partial g}{\partial u_i}(u_1,\dots,u_n)=\sum_{j=1}^{p}\partial_j f(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_p(u_1,\dots,u_n)).\frac{\partial x_j}{\partial u_i}(u_1,\dots,u_n).$$

Exemple 8 : Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(u,v)=f(uv,u^2+v^2).$$

Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

Exemple 9 (important) : Passage en coordonnées polaires
Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On note $F:(r,\theta)\mapsto f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$.

1. Montrer que $F\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.
2. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ tels que $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$.
   Exprimer $\nabla F(r,\theta)$ en fonction des dérivées partielles de f en (x,y).
   En déduire $\nabla f(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de F en (r,θ).

Corollaire 13

Soit $f\in\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ avec U ouvert convexe.
La fonction f est constante sur U si et seulement si toutes ses dérivées partielles sont nulles sur U.

En d'autres termes, f est constante sur U si et seulement si pour tout $a\in U$, $df(a)=0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})}$.

Exemple 10 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_-^*$ par :

$$f(x,y)=\arctan x+\arctan y-\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_-^*$ et calculer ses dérivées partielles.
2. En déduire $f(x,y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_-^*$.

II. Calcul différentiel du second ordre

A. Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 14

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ avec U ouvert. Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$.
On suppose que f est dérivable par rapport à sa i-ème variable en tout point de U.
Soit $a \in U$. On dit que f *est deux fois dérivable en a par rapport à sa i-ème puis à sa j-ème variable* lorsque la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est dérivable en a par rapport à sa j-ème variable.
On appelle alors *dérivée partielle d'ordre 2 de f en a par rapport à la i-ème puis la j-ème variable* et on note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ le réel :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a).$$

On note aussi $\partial^2_{j,i} f(a) = \partial_j(\partial_i f)(a)$.
Lorsque $i = j$, on note plutôt $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ ou $\partial^2_{i,i} f(a)$.

Définition 15

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ avec U ouvert. Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$.
On suppose que f est deux fois dérivable par rapport à sa i-ème puis à sa j-ème variable en tout point de U.
On appelle *dérivée partielle d'ordre 2 de f par rapport à la i-ème puis à la j-ème variable* la fonction :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \end{array}$$

Les dérivées partielles secondes, si elles existent toutes, sont au nombre de p^2 et ce sont aussi des fonctions de p variables.

Exemple 11 : Déterminer les dérivées partielles secondes de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto \cos(xy^2 + 3z)$.

B. Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

Définition 16

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.
On dit que f est *de classe $\mathscr{C}^2$ sur U* lorsque toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de f existent et sont continues sur U.

- f est classe $\mathscr{C}^2$ sur U si et seulement si toutes les dérivées partielles d'ordre 1 de f existent et sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
- Toutes les opérations vues précédemment pour la classe $\mathscr{C}^1$ sont encore valables en remplaçant $\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ par $\mathscr{C}^2(U,\mathbb{R})$. Dans la pratique, on utilise ces théorèmes généraux pour prouver que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et justifier ainsi l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 et les calculs effectués.

Théorème 17 (*Théorème de Schwarz*)

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U alors pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ et pour tout point $a \in U$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Exemple 12 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer l'existence et calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
   Qu'en déduit-on ?

Définition 18

Soit $f \in \mathscr{C}^2(U,\mathbb{R})$. Soit $a \in U$.
On appelle *matrice hessienne de f au point a* et on note $H_f(a)$ la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$:

$$H_f(a) = (\partial^2_{i,j} f(a))_{1\leqslant i,j\leqslant p} = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(a) & \partial^2_{1,2} f(a) & \cdots & \partial^2_{1,p} f(a) \\ \partial^2_{2,1} f(a) & \partial^2_{2,2} f(a) & \cdots & \partial^2_{2,p} f(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial^2_{p,1} f(a) & \partial^2_{p,2} f(a) & \cdots & \partial^2_{p,p} f(a) \end{pmatrix}.$$

On notera que par le théorème de Schwarz, la matrice $H_f(a)$ est une matrice symétrique réelle.

Exemple 13 : Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $F : (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer $H_F(r,\theta)$ pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.
   Exprimer $\Delta f(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de F en (r,θ).

Théorème 19 (*Formule de Taylor-Young à l'ordre 2*)

Si $f \in \mathscr{C}^2(U, \mathbb{R})$ alors f admet en tout point a de U un *développement limité d'ordre* 2. Pour tout $h = (h_1, \ldots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ vérifiant $a + h \in U$, on a :

$$f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \partial^2_{i,j} f(a) h_i h_j}_{= X^\top H_f(a) X} + \underset{h \to 0}{o}(\|h\|^2)$$

en notant X le vecteur-colonne des coordonnées de h dans la base canonique.

En identifiant tout vecteur de $\mathbb{R}^p$ au vecteur-colonne de ses coordonnées dans la base canonique, on peut écrire :

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + \underset{h \to 0}{o}(\|h\|^2).$$

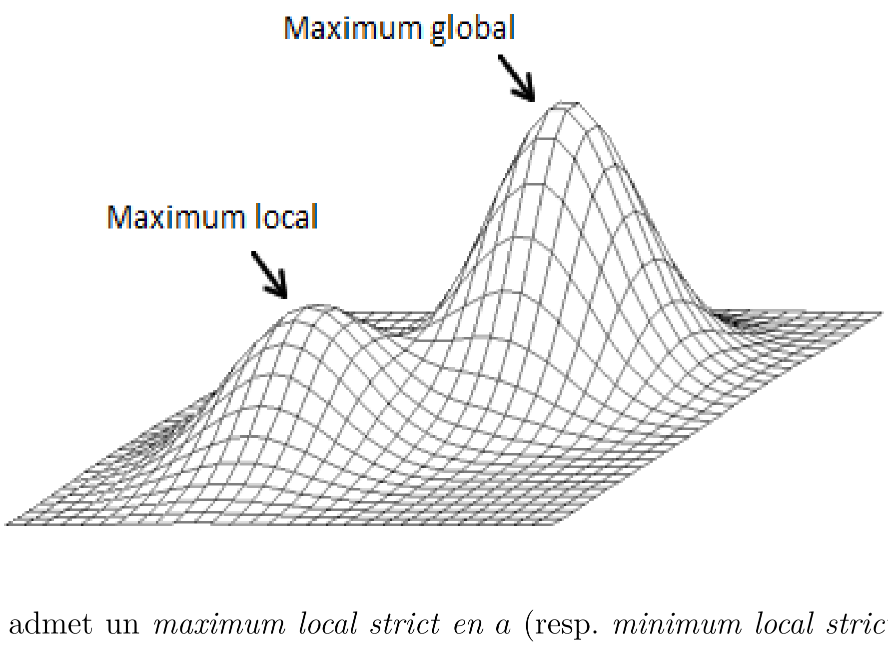
III. Application à la recherche d'extremum

A. Définitions

Définition 20

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$.

- On dit que f admet un *maximum global en* a (resp. *minimum global en* a) lorsque pour tout $x \in U$, on a $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$).
- On dit que f admet un *maximum local en* a (resp. *minimum local en* a) lorsqu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in U \cap B_o(a, r)$, on a $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$).
- On dit que f admet un *extremum en* a lorsque f admet un maximum ou un minimum en a.



On dit aussi que f admet un *maximum local strict en* a (resp. *minimum local strict en* a) lorsqu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in U \cap B_o(a, r) \setminus \{a\}$, on a $f(x) < f(a)$ (resp. $f(x) > f(a)$).

B. Condition nécessaire du premier ordre

Définition 21

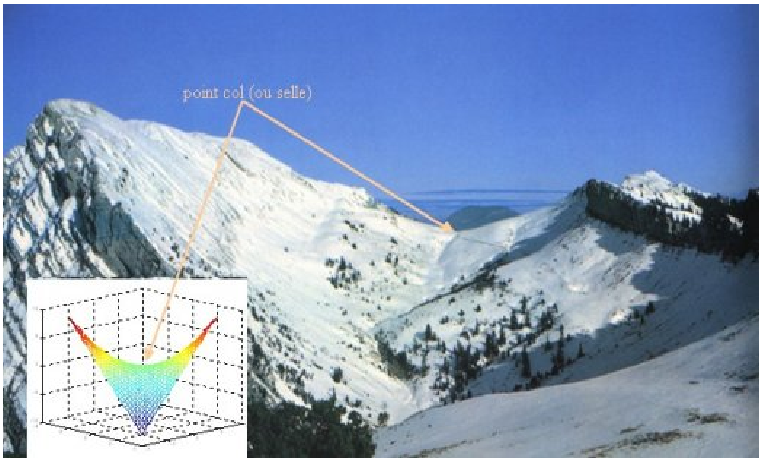
Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$.
On dit que a est un *point critique* de f lorsque $\nabla f(a) = (0,\dots,0)$.

Théorème 22 (*Condition nécessaire du premier ordre*)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$.
Si f admet un extremum local en a alors a est un point critique de f.

Exemple 14 : Déterminer les extrema locaux et globaux de $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Les points en lesquels f atteint ses extremums locaux (s'il en existe) sont des points critiques.
Mais certains points critiques peuvent être des *points selle* ou *points col* : en ces points, f n'admet pas d'extremum local.
Exemple : Représentation graphique de $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$.



*Pour déterminer les extremums **globaux** d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur une partie F de $\mathbb{R}^p$ **fermée** et **bornée** (non vide) :*

D'après le théorème des bornes atteintes, en tant que fonction continue sur un fermé borné (non vide avec $\mathbb{R}^p$ de dimension finie), f admet un maximum et un minimum globaux sur F.
Pour les déterminer :

- On cherche les points critiques de f sur l'intérieur de F (c'est un ouvert) et on calcule leur image par f.
- On étudie les extremums de f sur le bord de F en paramétrant F.
- On compare les valeurs obtenues et on conclut.

Exemple 15 : Après avoir justifié leur existence, déterminer les extremums globaux de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^3 - 3x(1+y^2)$ sur l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Exemple 16 : Montrer que $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$ admet un maximum et un minimum sur $[0,1]^2$ et les déterminer.

C. Condition suffisante du second ordre

Théorème 23 (*Condition suffisante du second ordre*)

Soit $f \in \mathscr{C}^2(U, \mathbb{R})$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$ un point critique de f.

- Si $H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ alors f atteint un minimum local strict en a.
- Si $H_f(a) \notin \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$ alors f n'a pas de minimum en a.

Adaptation à l'étude d'un maximum :

- Si $-H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ alors f atteint un maximum local strict en a.
- Si $-H_f(a) \notin \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$ alors f n'a pas de maximum en a.

En utilisant le lien connu avec les valeurs propres, on peut résumer les conditions du second ordre selon le signe des valeurs propres de la hessienne au point a de la façon suivante.

$$\begin{aligned}
\text{Valeurs propres toutes strictement positives} &\implies \text{Minimum local strict en } a\\
\text{Valeurs propres toutes strictement négatives} &\implies \text{Maximum local strict en } a\\
\text{Au moins deux valeurs propres de signes opposés (strict)} &\implies \text{Pas d'extremum en } a\\
0 \text{ est valeur propre et les autres valeurs propres sont toutes de même signe} &\implies \text{On ne peut pas conclure}
\end{aligned}$$

Corollaire 24 (*Cas* $p = 2$)

Soit $f \in \mathscr{C}^2(U, \mathbb{R})$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $a \in U$ un point critique de f.

- Si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\operatorname{tr}(H_f(a)) > 0$ alors f atteint un minimum local strict en a.
- Si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\operatorname{tr}(H_f(a)) < 0$ alors f atteint un maximum local strict en a.
- Si $\det(H_f(a)) < 0$ alors f n'a pas d'extremum en a.

Exemple 17 : Étudier les extremums locaux et globaux de $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

Exemple 18 : Déterminer les extremums locaux et globaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

a) $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2xy$ b) $f(x, y) = -x^3 - y^3 + 3xy$ c) $f(x, y) = (x - y)^2 + x^3 + y^3$