Capacités numériques : équation de Laplace 2D par méthode dite de relaxation

I Introduction

L'équation de Laplace intervient en électrostatique, en gravitation, en thermique mais aussi dans beaucoup d'autres domaines de la physique (mécanique des fluides par exemple). Il est donc particulièrement important de savoir la résoudre, au moins numériquement.

II Discrétisation de l'équation de diffusion thermique

Une résolution numérique passe obligatoirement par une discrétisation de la solution : au lieu de calculer un potentiel $V(x,y)$ (par exemple) fonction de deux coordonnées variant continûment, on calcule les valeurs $V_{i,j}$ de ce potentiel en des points $M_{i,j}$ particuliers répartis sur le domaine de résolution.

Dans la méthode des éléments finis que l'on va appliquer ici, les points de discrétisation sont sur un réseau régulier. On va utiliser $(n+1)\times(m+1)$ points $M_{i,j}$ de coordonnées $(i\Delta x, j\Delta y)$ où Δx est le pas de discrétisation de long de (Ox), Δy le pas de discrétisation de long de (Oy), $i \in [|0,n|]$ $j \in [|0,m|]$.

Le domaine de résolution est donc inclus dans le rectangle $[0, n\Delta x] \times [0, m\Delta y]$.

On peut écrire les développement limités à l'ordre 2 suivants :

$$V(x+\Delta x, y) \simeq V(x,y) + \Delta x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$V(x-\Delta x, y) \simeq V(x,y) - \Delta x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

D'où l'on tire

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \simeq \frac{V(x+\Delta x,y)+V(x-\Delta x,y)-2V(x,y)}{(\Delta x)^2}$$

En faisant de même pour y on trouve une expression approchée de $\Delta V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}$:

$$\Delta V \simeq \frac{V(x+\Delta x,y)+V(x-\Delta x,y)-2V(x,y)}{(\Delta x)^2} + \frac{V(x,y+\Delta y)+V(x,y-\Delta y)-2V(x,y)}{(\Delta y)^2}$$

En choisissant $\Delta x = \Delta y$, l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ permet d'écrire :

$$V(x,y) \simeq \frac{1}{4}\left(V(x+\Delta x,y)+V(x-\Delta x,y)+V(x,y+\Delta y)+V(x,y-\Delta y)\right),$$

soit pour les potentiels en les points de discrétisation :

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}\left(V_{i+1,j}+V_{i-1,j}+V_{i,j+1}+V_{i,j-1}\right).$$

III Résolution numérique par la méthode de relaxation

La méthode de relaxation est basée sur l'algorithme suivant :

- on définit un tableau V^0 contenant des estimations initiales des valeurs du potentiel, $V^0_{i,j}$ pour $(i,j) \in [|0,n|] \times [|0,m|]$;
- on met dans un nouveau tableau V^1 de nouvelles estimations des valeurs du potentiel du potentiel obtenues de la manière suivante :
  - — pour $(i,j) \in [|1,n-1|] \times [|1,m-1|]$ on applique a priori la relation déduite d'un calcul antérieur :

$$V^1_{i,j} = \frac{1}{4}\left(V^0_{i+1,j} + V^0_{i-1,j} + V^0_{i,j+1} + V^0_{i,j-1}\right).$$

  - — sur la frontière du domaine de calcul (c'est-à-dire si $i=0$, ou $i=n$, ou $j=0$ ou $j=m$) et en tous les points de l'intérieur du domaine concernés, on prend pour $V^1_{i,j}$, la valeur donnée par les conditions aux limites (à l'intérieur du domaine on remplace la valeur calculée par la formule précédente par celle qu'impose une éventuelle condition aux limites) ;
- — on calcule l'écart entre les tableaux V^0 et V^1 défini par :

$$d = \max\left\{\left|V^1_{i,j} - V^0_{i,j}\right|, (i,j) \in [|0,n|] \times [|0,m|]\right\}$$

- — si $d < \varepsilon$ (ε est un nombre fixant la précision du calcul), on a terminé, sinon on recom mence en remplaçant les valeurs de V^0 par les valeurs de V^1 .

IV Exemple traité

On considère deux long rubans métalliques identiques, parallèles entre eux, de largeur L, d'épaisseur e, de très grande longueur selon (Oz) et distants de a (cf. figure ci-après). Ils sont portés aux potentiels constants U et $-U$ par rapport à la terre (le potentiel de la terre est nul).

On néglige les effets de bords liés à la longueur finie des rubans selon (Oz) ; alors le potentiel électrostatique est de la forme $V(M) = V(x,y)$. Comme il n'y a pas de charge en dehors de celles portées par les rubans, le potentiel vérifie en tout point extérieur aux rubans, $\Delta V = 0$.

Pour calculer ce potentiel on utilise la méthode de la relaxation. On choisit des pas de discrétisation Δx et Δy égaux et des nombres de points de discrétisation $n+1$ et $m+1$ respectivement selon les axes (Ox) et (Oy), et on suppose que e, a et L sont des multiples entiers de $\Delta x = \Delta y$.

Les conditions aux limites pour le calcul sont représentées sur la figure ; elles contiennent :

- les valeurs de potentiel imposées aux deux rubans métalliques ;
- la nullité du potentiel sur la frontière du domaine de calcul (qui remplace la nullité du potentiel en théorie à l'infini).

La deuxième condition est inhérente à la nature du calcul ; elle n'aura pas d'influence notable sur le résultat si l'on peut se permettre de prendre n et m suffisamment grands pour que $n\Delta x$ et $m\Delta y$ soient très supérieurs aux dimensions des rubans.

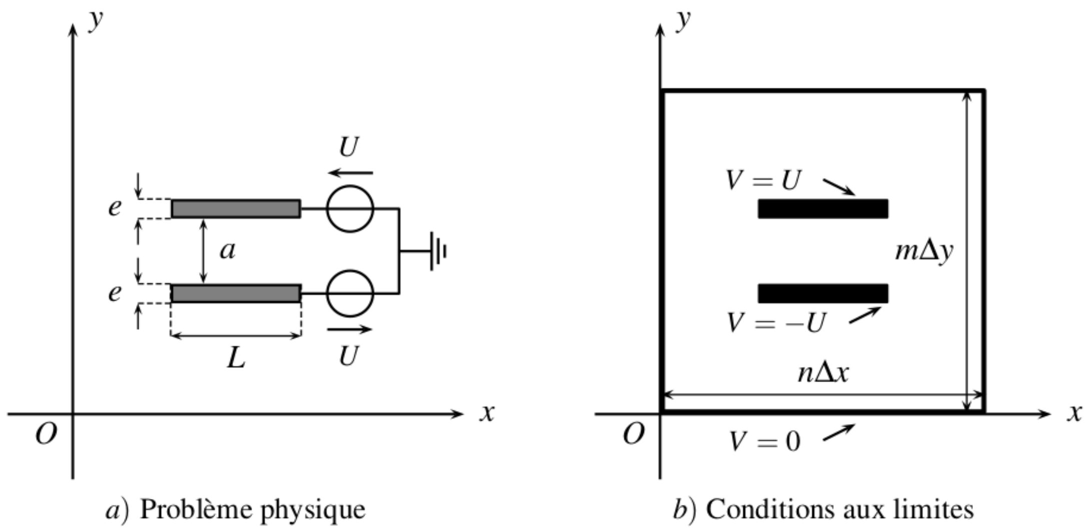
y
U
e
a
e
L
U
O
x
a) Problème physique
y
V = U
mΔy
V = −U
nΔx
O
V = 0
x
b) Conditions aux limites

FIGURE 1 –