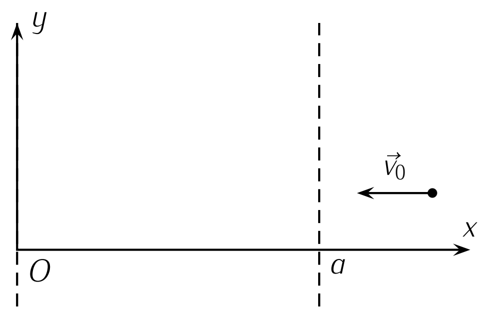
Travaux Dirigés M_4

Exercice 1 : Barrière électromagnétique

1. Barrière électrique : il règne un champ électrique uniforme $\vec{E} = E_0\vec{u}_x$ entre les plans $x = 0$ et $x = a$ et un champ nul partout ailleurs.

   Des particules de charge $q > 0$, de masse m arrivent de l'infini du coté des $x > 0$ avec des vitesses identiques $\vec{v}_0$ portées par l'axe Ox.

   Quelle est la condition sur v_0 pour que les particules ne puissent pas franchir cette barrière de potentiel ?

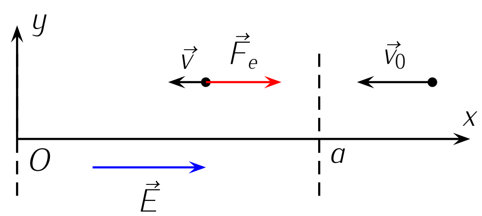


2. Barrière magnétique : entre les plans $x = 0$ et $x = a$, il règne maintenant un champ magnétique uniforme $\vec{B} = -B_0\vec{u}_z$.

Quel est le rayon de courbure de la trajectoire des particules ? Reprendre la question du 1.

1. Barrière électrique : on représente le champ $\vec{E}$ et la force $\vec{F}_e = q\vec{E}$ subie par la particule.

   À partir de $x = a$ cette dernière est ralentie et on cherche finalement la valeur de U pour laquelle sa vitesse s'annule en $x = 0$: $v_f = 0$.



   Par application du théorème de l'énergie cinétique entre ces deux points,

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W(\vec{E}) = \int \delta W = \int_{x=a}^{0} qE.\vec{e}_x.dx.\vec{e}_x = qE(0-a) = -qU$$

   On obtient bien $W(\vec{F}_e) < 0$ pour cette force qui s'oppose au déplacement et $v_f^2 = v_0^2 - \frac{2qU}{m} < v_0^2$.

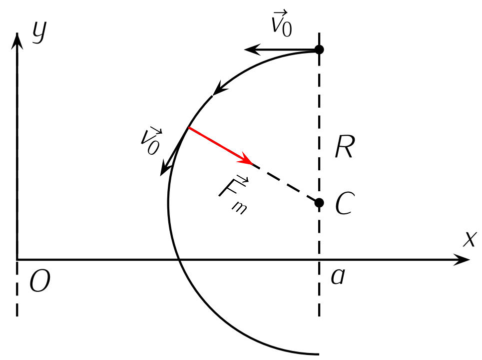
À la limite, $v_f = 0$ pour $v_0^2 = \frac{2qU}{m}$. Il faut et il suffit donc que $v_0 \leq \sqrt{\frac{2qU}{m}}$.

2. Barrière magnétique : cette fois, la particule va garder la même vitesse (numérique) v_0 mais sa trajectoire sera un arc de cercle de centre C et de rayon $R = \frac{mv_0}{qB}$ (Cf. calcul fait en classe).

   Pour qu'elle reste dans le secteur $x \geq 0$, il faut et il suffit que

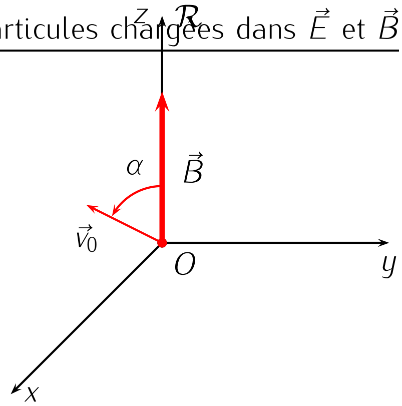
$$R = \frac{mv_0}{qB} \leq a \Rightarrow v_0 \leq \frac{qBa}{m}$$

.



Exercice 2 : Particule dans un champ $\vec{B}$

On étudie une particule chargé plongé dans un champ magnétique constant et uniforme : $\vec{B} = B\vec{e}_z$, à l'instant initiale, la particule se trouve en O et a une vitesse initiale $\vec{v}_0$ dans le plan (xOz). On travaillera en coordonnées cartésienne.



1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique pour obtenir deux équations différentielles couplées liant v_x et v_y.
2. Résolution classique :
   (a) En dérivant l'une de ces deux équations par rapport au temps, obtenir une équation différentielle sur la vitesse v_x et la résoudre. Faire de même pour la vitesse v_y.
   (b) En utilisant les conditions initiales, en déduire l'équation paramétrique de la trajectoire $(x(t),\ y(t),\ z(t))$.
3. Résolution avec la méthode des complexes.
   (a) Il est possible de résoudre le système d'équation couplées, en utilisant un intermédiaire de calcul : la fonction complexe : $C = v_x + jv_y$. Calculer $\dot{C}$ en utilisant le système d'équation couplées. En déduire que C est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant.
   (b) En déduire une expression de C puis par identification une expression de v_x et v_y.

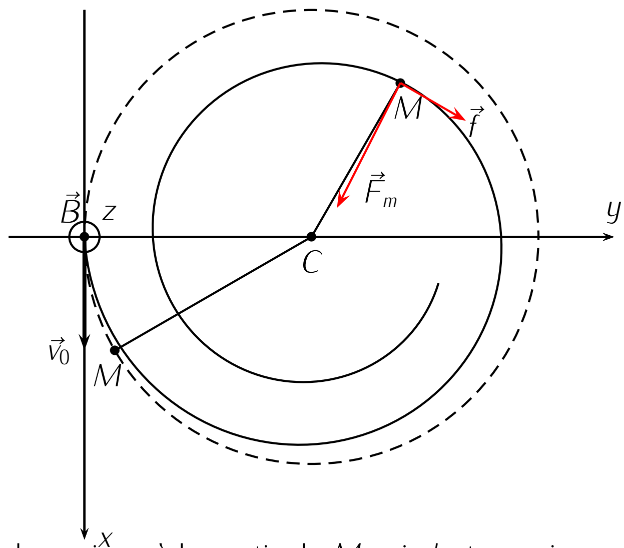
Correction faite en TD

Exercice 3 : Charge dans $\vec{B}$ et avec frottements fluides.

Une particule de masse m et de charge $q = -e < 0$ se trouve initialement en un point O avec une vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{e}_x$.
Elle se déplace dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et permanent $\vec{B} = B\vec{e}_z$ et subit également une force de frottement fluide de la forme $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ avec λ une constante positive.

1. Quelle est le mouvement (trajectoire et vitesse) de la particule si $\lambda = 0$?
   Représenter la trajectoire.
2. On prend maintenant $\lambda \neq 0$ mais faible.
   Représenter, sans calcul supplémentaire, l'allure de la nouvelle trajectoire.
3. Déterminer les équations différentielles du mouvement.
4. On pose $\underline{u} = x + jy$, $\omega = \frac{eB}{m}$ et $\tau = \frac{m}{\lambda}$.
   Déterminer $\underline{u}(t)$.
   Comment calculerait-on $x(t)$ et $y(t)$?
   Préciser la position finale de la particule.

Pour $q < 0$



1. Si $\lambda = 0$, on retrouve le cas d'une particule dans $\vec{B}$ seul.
   Sa vitesse initiale étant normale à $\vec{B}$, on a affaire à un mouvement circulaire uniforme de rayon $R = \frac{mv_0}{eB}$ et de centre (0,R,0) (trajectoire tracée en pointillés sur la figure ci-contre).
2. Si $\lambda \neq 0$ mais reste faible, la trajectoire reste quasi circulaire mais par application du théorème de la puissance cinétique :
   $$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_m) + \mathcal{P}(\vec{f}) = 0 + \mathcal{P}(\vec{f}) < 0$$
   on voit que la présence de frottement diminue v.
   Comme $R = \frac{mv}{eB}$, le rayon de courbure de la trajectoire diminue d'où l'apparition d'une spirale.
3. On détermine les équations différentielles du mouvement par application du principe fondamental de la dynamique à la particule M qui n'est soumise qu'à $\vec{F}$ et $\vec{f}$ (on néglige son poids).
   $$m\vec{a} = q\vec{v}\wedge\vec{B} - \lambda.\vec{v} \Rightarrow \quad m\left|\begin{array}{l}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{array}\right. = q\left|\begin{array}{l}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l}0\\ 0 - \lambda\\ B\end{array}\right|\begin{array}{l}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{array} \Rightarrow \left|\begin{array}{l}m\dot{v}_x = qBv_y - \lambda v_x\\ m\dot{v}_y = -qBv_x - \lambda v_y\\ m\dot{v}_z = -\lambda v_z\end{array}\right.$$
4. En posant $\omega = \frac{eB}{m} = -\frac{qB}{m}$ et $\tau = \frac{m}{\lambda}$, les équations précédentes s'écrivent $\dot{v}_x = -\omega v_y - \frac{v_x}{\tau}$ (équation ①), $\dot{v}_y = \omega v_x - \frac{v_y}{\tau}$ (équation ②) et $\ddot{z} = -\frac{\dot{z}}{\tau}$ (équation ③).
   L'équation ③ s'intègre facilement : $\dot{z} = -\frac{z}{\tau} + 0$ et $z = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $z(0) = 0$ d'où $A = 0$ et $z(t) = 0$ pour tout t : le mouvement reste plan.
   Pour déterminer $x(t)$ et $y(t)$, c'est à dire pour résoudre les équations ① et ②, on pose $\underline{u} = x + j.y$ et en dérivant par rapport au temps,
   $$\underline{\dot{u}} = v_x + j.v_y \Rightarrow \underline{\ddot{u}} = \dot{v}_x + j\dot{v}_y = -\omega v_y - \frac{v_x}{\tau} + j\omega v_x - j\frac{v_y}{\tau} = j\omega\underline{\dot{u}} - \frac{1}{\tau}\underline{\dot{u}} \Rightarrow \underline{\ddot{u}} = [j\omega - \frac{1}{\tau}]\underline{\dot{u}}$$
   d'où $\underline{\dot{u}} = \underline{U_0}\exp[(j\omega - \frac{1}{\tau})t]$ et à $t = 0$, $\underline{\dot{u}}(t) = v_x(0) + jv_y(0) = v_0 \Rightarrow \underline{\dot{u}}(t) = v_0\exp(j\omega t)\exp(-\frac{t}{\tau})$.

Par intégration, $\underline{u}(t) = \frac{v_0\tau}{1-j\tau\omega}[1 - \exp(-\frac{t}{\tau})\exp(j\omega t)]$.

Le terme $e^{j\omega t}$ correspond au mouvement de rotation et celui en $\exp(-\frac{t}{\tau})$ à un amortissement exponentiel d'où une trajectoire en forme de spirale.

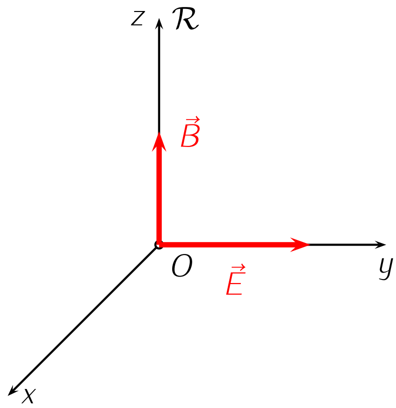
Pour déterminer complètement $x(t)$ et $y(t)$, il faudrait calculer $x(t) = \Re(\underline{u}(t))$ et $y(t) = \Im(\underline{u}(t))$ (calcul fastidieux). Pour $t \gg \tau$, $e^{-\frac{t}{\tau}}$ tend vers 0 et

$$\underline{u}(\infty) \simeq \frac{v_0\tau}{1-j\tau\omega} = \frac{v_0\tau(1+j\omega\tau)}{1+\omega^2\tau^2} = x(\infty) + jy(\infty) \Rightarrow x(\infty) \simeq \frac{v_0\tau}{1+\omega^2\tau^2} \text{ et } y(\infty) \simeq \frac{\omega v_0\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}$$

par identification.

Exercice 4 : Charge dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniformes et perpendiculaires.

Une particule M de masse m et de charge $q > 0$ pénètre à $t = 0$ en O avec une vitesse $\vec{v}_0$ dans une région où règnent un champ uniforme et permanent $\vec{E}$ orienté selon Oy, et un champ $\vec{B}$ uniforme et permanent selon Oz (Cf dessin). On posera $\omega = \frac{qB}{m}$ dans les calculs.



1. La vitesse $\vec{v}_0$ est suivant Oz.

   Écrire les équations différentielles du mouvement de P et $z(t)$

   Déterminer les équations du mouvement $x(t)$ et $y(t)$ par la méthode complexe, en introduisant $\underline{C} = v_x + jv_y$

2. Étude du cas où $v_0 = 0$.

   Déterminer les équations paramétriques du mouvement de P et définir sa trajectoire.

   Déterminer la distance à l'origine O du point A où la trajectoire aboutit pour la 1ère fois sur l'axe Ox.

3. La vitesse $\vec{v}_0$ est maintenant normale à $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

   Donner les nouvelles équations paramétriques du mouvement.

   Pour quelle valeur de v_0 la particule n'est elle pas déviée ? Application ?

1. On peut appliquer le principe fondamental de la dynamique.

$$m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B} \iff \left|\begin{array}{l} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{array}\right. = \left|\begin{array}{ll} \omega v_y & (1) \\ \omega(\frac{E}{B} - v_x) & (2) \\ 0 & (3) \quad \Rightarrow \quad v_z = v_0 \end{array}\right.$$

$$\underline{C} = v_x + jv_y \Rightarrow \dot{\underline{C}} = \dot{v}_x + j\dot{v}_y = \omega v_y + j\omega\frac{E}{B} - j\omega v_x = j\omega\frac{E}{B} - j\omega\underline{C}$$

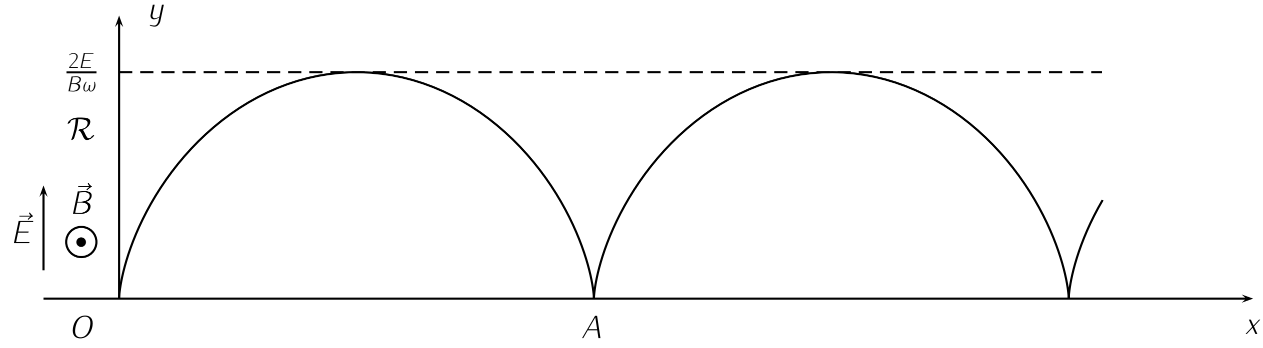
La solution de cette équation est $sol_P + sol_H$ avec $sol_P = Cte = \frac{E}{B}$ d'où

$$\underline{C} = \frac{E}{B} + \underline{C}_0 e^{-j\omega t} = \frac{E}{B}(1 - e^{-j\omega t}) = \frac{E}{B}(1 - \cos\omega t + j\sin\omega t)$$

en tenant compte de la CI : $\underline{C}(t=0) = \frac{E}{B} + \underline{C}_0 = 0$.

$$\text{Et par identification,} \left|\begin{array}{ll} v_x = \frac{E}{B}(1-\cos\omega t) & \Rightarrow \\ v_y = \frac{E}{B}\sin\omega t & \Rightarrow \\ & \end{array}\right| \begin{array}{l} x = \frac{E}{B\omega}(\omega t - \sin\omega t) \\ y = \frac{E}{B\omega}(1-\cos\omega t) \\ z = v_0 t \end{array}$$

2. Pour $v_0 = 0$, on obtient un mouvement plan cycloïdal.



M est en A quand $y = 0$ pour la deuxième fois (première fois à $t = 0$), c'est à dire à t_1 tel que $\cos\omega t_1 = 1 \Rightarrow \omega t_1 = 2\pi$ et on a alors $x = x_A = \frac{E}{B\omega}(2\pi - \sin 2\pi) = \frac{2\pi E}{B\omega}$.

3. On a maintenant $\vec{v_0} = v_0\vec{e}_x$ à $t = 0$, ce qui ne change que la condition initiale. On a donc toujours $\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = 0 \Rightarrow z = 0$: mouvement plan.

   et $\underline{C} = \frac{E}{B} + \underline{C}_0 e^{-j\omega t}$ avec $\underline{C}(t = 0)= \frac{E}{B} + \underline{C}_0 = v_0 + 0j = v_0 \iff \underline{C}_0 = v_0 - \frac{E}{B}$ et $\underline{C} = \frac{E}{B} + (v_0 - \frac{E}{B})e^{-j\omega t}$

   Par identification, $\left|\begin{array}{ll} v_x = \frac{E}{B} + (v_0 - \frac{E}{B})\cos\omega t & \Rightarrow \\ v_y = -(v_0 - \frac{E}{B})\sin\omega t & \Rightarrow \\ & \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x = \frac{E}{B}t + \frac{1}{\omega}(v_0 - \frac{E}{B})\sin\omega t \\ y = \frac{1}{\omega}(v_0 - \frac{E}{B})(\cos\omega t - 1) \\ z = 0 \end{array}\right.$

   La particule n'est pas déviée si $v_0 = \frac{E}{B}$ et $\vec{v_0}$ normal à $\vec{E}$ et $\vec{B}$ donc si $\vec{E} = \pm\vec{v_0} \wedge \vec{B}$, on peut ainsi produire un filtre de vitesse.

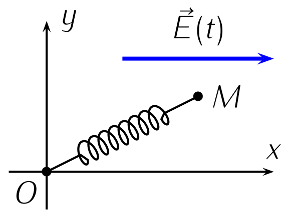
Exercice 5 : La couleur du ciel

Pour décrire les interactions entre une onde lumineuse (électromagnétique) caractérisée par le vecteur champ électrique $\vec{E}(t) = \vec{E_0}\cos\omega t = E_0\cos(\omega t).\vec{e}_x$ et les électrons de la couche externe d'un atome, on utilise l'hypothèse de l'électron élastiquement lié de J.J THOMSON.

1. Établir l'équation différentielle et vectorielle du mouvement d'un tel électron quand il est excité par $\vec{E}$ en admettant qu'il est rappelé vers le centre O de l'atome par une force de rappel $\vec{F} = -k\overrightarrow{OM}$ et qu'il est freiné par une force proportionnelle à sa vitesse $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.

   On notera q et m la charge et la masse de l'électron.

   On posera $2\alpha = \frac{\lambda}{m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.



2. Démontrer, par projection de l'équation précédente, qu'en régime permanent l'électron oscille parallèlement à $\vec{E_0}$. On notera $x(t)$ son élongation.

3. Calculer $\underline{X}(\omega)$ l'amplitude complexe de l'élongation $x(t)$ puis $A(\omega)$ l'amplitude de son accélération $\ddot{x}(t) = a_x(t)$.

4. Cet atome est éclairé par de la lumière blanche composée d'ondes dont les pulsations sont comprises entre ω_1 (rouge) et ω_2 (violet). Sachant que ω_1 et ω_2 sont tous deux très inférieurs à ω_0, montrer que, dans ces conditions, l'amplitude $A(\omega)$ est proportionnelle à ω^2.

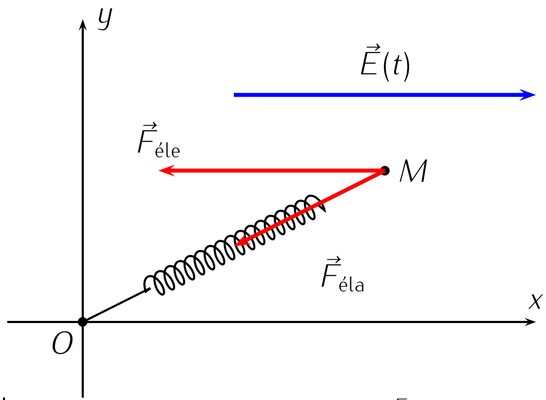
5. Sachant qu'un électron accéléré rayonne une puissance lumineuse P proportionnelle au carré de son accélération, expliquer pourquoi le ciel est bleu.

1. En considérant que le référentiel lié au noyau O est galiléen (ce qui est loin d'être le cas), on peut appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD) à l'électron dont on néglige le poids :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{éla}} + \vec{F}_{\text{éle}} + \vec{f}$$

$$\Rightarrow m\vec{a} = -e.\vec{E}(t) - k.\vec{r} - \alpha.\vec{v} \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\alpha\frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{q}{m}\vec{E}(t)$$

en posant $2\alpha = \frac{\lambda}{m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.



2. Par projection du PFD selon les trois axes, on obtient $\left|\begin{array}{l}\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m}E(t) = \frac{qE_0}{m}\cos\omega t \\ \ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \\ \ddot{z} + 2\alpha\dot{z} + \omega_0^2 z = 0\end{array}\right.$

Les équations en $y(t)$ et $z(t)$, sans second membre, traduisent un régime libre et $y(t)$ et $z(t)$ vont tendre vers 0 après un régime transitoire plus ou moins long.

Par contre, à la fin de ce régime transitoire, $x(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi)$: régime sinusoïdal forcé.

3. En notation complexe, on pose $\underline{x}(t) = \underline{X}.e^{j\omega t}$ où $\underline{X}$ est l'amplitude complexe de $x(t)$. On en déduit $\underline{\dot{x}}(t) = j\omega\underline{X}.e^{j\omega t}$ et $\underline{\ddot{x}}(t) = -\omega^2\underline{X}.e^{j\omega t}$ et en remplaçant dans la projection du PFD selon x, on trouve

$$-\omega^2\underline{X}.e^{j\omega t} + 2j\omega\alpha\underline{X}.e^{j\omega t} + \omega_0^2\underline{X}.e^{j\omega t} = \frac{qE_0}{m}e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{X}(\omega) = \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\alpha j\omega)}$$

puis $A = |-\omega^2\underline{X}| = \frac{q\omega^2E_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}}$ l'amplitude de son accélération.

4. Pour $\omega \ll \omega_0$, $A \simeq \frac{q\omega^2E_0}{m\sqrt{\omega_0^4}} \simeq \frac{q\omega^2}{m\omega_0^2}E_0$ proportionnel à ω^2.

5. Les électrons rayonnent une puissance P proportionnelle à A^2 c'est à dire à ω^4 où $\omega = 2\pi f = 2\pi\frac{c}{\lambda}$.

On peut calculer $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\omega_1^4}{\omega_2^4} = \frac{\lambda_2^4}{\lambda_1^4}$ et en prenant $\lambda_1 \simeq 470$ nm (bleu) et $\lambda_2 \simeq 650$ nm (rouge), on obtient

$$P_1(\text{bleu}) = \frac{\lambda_2^4}{\lambda_1^4}P_2(\text{rouge}) \simeq 4P_2(\text{rouge})$$

Conclusion : après absorption de la lumière blanche du soleil, les électrons de l'atmosphère diffusent d'énergie lumineuse dans le domaine du bleu ce qui explique que le ciel nous apparaisse de cette couleur (les jours de beau temps).

Exercice 6 : **Expérience de Millikan.**

L'expérience de Millikan a permis de déterminer la valeur de la charge élémentaire.

Entre deux plateaux horizontaux d'un condensateur plan à air, distants de $h = 16$ mm, on introduit de petites gouttes de glycérine de rayon uniforme a et de volume V. On prendra $g = 10$ m.s^{-2}.

1. Le condensateur n'est pas chargé.
   (a) Montrer que chaque goutte abandonnée sans vitesse, atteint une vitesse limite $\vec{v}_0$ qu'on exprimera en fonction des données (on n'oubliera pas la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho' V\vec{g}$) ; on donne :
   - $\vec{R}$ résistance de l'air $R = 6\pi\eta a v$ (force $\vec{R}$ opposée à la vitesse $\vec{v}$),
   - coefficient de viscosité de l'air $\eta = 1{,}83.10^{-5}$ kg.m^{-1}.s^{-1},

- masse volumique de la glycérine $\rho = 1260$ kg.m^{-3},
- masse volumique de l'air $\rho' = 1{,}3$ kg.m^{-3}.

(b) A l'aide d'une lunette d'observation, on constate qu'une goutte parcourt 7,84 mm en 20,4 s. Calculer le rayon a de la goutte.

(c) Au bout de combien de temps la vitesse limite est-elle atteinte à 1 pour mille près ?

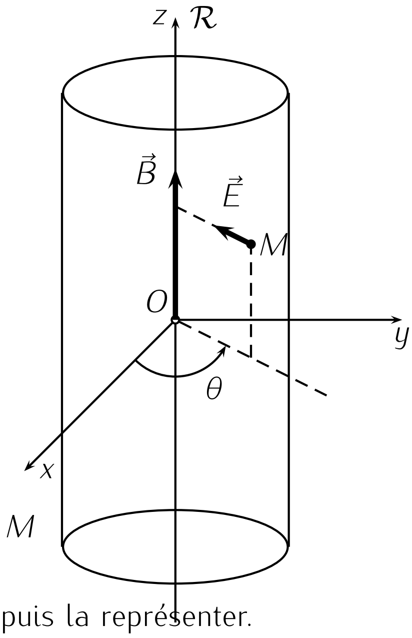
2. On établit une ddp U constante entre les plateaux du condensateur.

(a) Exprimer la nouvelle vitesse limite v_1 d'une goutte qui porte une charge q, en fonction de v_0, q, η, a, U et h.

(b) Pour immobiliser la goutte, il faut appliquer une tension $U_1 = 7$ kV. Calculer q et commenter.

1. a. $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{\rho-\rho'}{\rho}\vec{g}$ avec $\tau = \frac{2\rho a^2}{9\eta}$ d'où $\vec{v_0} = \frac{2a^2(\rho-\rho')}{9\eta}\vec{g}$. 1. b. hypothèse : $\tau \ll 20{,}4$ s $\rightarrow a = 1{,}6.10^{-6}$ m. Vérification : $\tau = \frac{v_0}{g} = 3{,}91.10^{-5} \ll 20{,}4$ s. 1. c. $t = 3\tau \ln 10 \simeq 2{,}6.10^{-4}$ s. 2. a. $v_1 = v_0 - \frac{qU}{6\pi\eta a h}$ (si $q > 0$). 2. b. $q = \frac{6\pi\eta a h v_0}{U_1} \simeq 3e$ charge quantifiée.

Exercice 7 : Charge dans $\vec{E}$ radial et $\vec{B}$ axial.



Dans l'espace vide compris entre une cathode cylindrique de rayon négligeable et une anode cylindrique de rayon R et de même axe (Cf dessin), on produit un champ $\vec{E}$ radial (selon $-\vec{e}_r$ du système de coordonnées cylindriques) et un champ $\vec{B}$ axial (selon $\vec{e}_z$) tous les deux permanents.
La cathode émet par effet thermoélectrique des électrons de charge $-e$ et de masse m avec une vitesse initiale supposée nulle.

1. Rappeler l'expression de l'accélération et de la vitesse d'un point matériel en coordonnées cylindriques et montrer que $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$.
2. Écrire les équations différentielles du mouvement de la particule M entre la cathode et l'anode.
3. Écrire l'équation de la trajectoire de M en coordonnées polaires puis la représenter.
4. Le module de $\vec{E}$ étant imposé, quelle est l'intensité minimale du champ $\vec{B}$ pour qu'un courant puisse circuler entre les deux conducteurs ? Voyez vous une application ?

1. Cf. cours M_1. 2. $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = eE - eBr\dot{\theta}$ (1),
$m\frac{dr^2\dot{\theta}}{dt} = er\dot{r}B$ (2) et $\ddot{z} = 0$ (3). 3. (2) $\rightarrow \theta = \frac{eB}{2m}t$ dans (1) $\rightarrow r = \frac{4mE}{eB^2}(1-\cos\theta)$ (et $z = Cte = 0$). 4. $B \leq \sqrt{\frac{8mE}{eR}}$ conduction du courant ou pas selon la tension entre l'anode et la cathode, comme une diode.